Лисиця В., Гонсалес Х. Дидактичний потенціал задач ізопериметричного типу у шкільному курсі математики. *Освіта. Інноватика. Практика,* 2026. Том 14, № 4. С. 70-77. https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol14i4-009.

Lysytsya V., González J. M. C. Dydaktychnyi potentsial zadach izoperymetrychnoho typu u shkilnomu kursi matematyky [Didactic potential of isoperimetric type problems in the school course of mathematics]. *Osvita. Innovatyka. Praktyka – Education. Innovation. Practice,* 2026. Vol. 14, No 4. S. 70-77. https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol14i4-009.

УДК 373.5.091.3:512:514
DOI: 10.31110/2616-650X-vol14i4-009

Віктор ЛИСИЦЯ
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Україна
https://orcid.org/0000-0003-2303-8143
lysytsya@karazin.ua
Хосе ГОНСАЛЕС
Інститут Escola Pia Mataró, Барселона, Іспанія
https://orcid.org/0009-0007-1996-2866
josepm.carbo@mataro.epiaedu.cat

ДИДАКТИЧНИЙ ПОТЕНЦІАЛ ЗАДАЧ ІЗОПЕРИМЕТРИЧНОГО ТИПУ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Анотація. *У статті досліджується проблема формування математичних компетентностей учнів у сучасних умовах реформування шкільної освіти. Актуальність теми зумовлена наявністю труднощів у школярів під час розв'язування задач прикладного характеру. Особливу увагу приділено задачам ізопериметричного типу як ефективному засобу реалізації компетентнісного підходу у навчанні математики. Розкрито їхній дидактичний потенціал у формуванні в учнів умінь математичного моделювання, оптимізації та дослідницької діяльності. Проаналізовано історичні витоки ізопериметричних задач, зокрема ідеї Зенодора, який доводив, що серед многокутників із заданим периметром найбільшу площу має правильний многокутник, а серед усіх фігур – коло. Показано, що ці ідеї відображають фундаментальний принцип оптимальності та симетрії, який зберігає актуальність у сучасній математичній освіті. У роботі здійснено аналіз українських і зарубіжних навчальних матеріалів щодо використання ізопериметричних задач у шкільному курсі математики. Встановлено, що такі задачі широко застосовуються під час вивчення геометрії, алгебри та математичного аналізу, проте їхній потенціал для інтеграції знань і розвитку компетентностей використовується не повною мірою. У роботі запропоновано підходи до конструювання задач, які поєднують прикладний зміст і внутрішньоматематичні ідеї, що дозволяє враховувати інтереси учнів різних освітніх напрямів. Обґрунтовано доцільність використання сучасних цифрових інструментів, таких як GeoGebra, Desmos та інших для впровадження дослідницьких методів навчання, що сприяє розвитку логічного та критичного мислення, умінь висувати та перевіряти гіпотези. Наведено приклади практичних задач на ізопериметрію, для розв'язання яких достатньо знання властивостей квадратичних функцій. Зроблено висновок, що систематичне використання задач ізопериметричного типу сприяє формуванню цілісного уявлення про математичні закономірності, розвитку міжпредметних і внутрішньопредметних зв'язків, а також ефективній реалізації STEM/STEAM/STREAM-підходів у навчанні математики.*

Ключові слова: *ізопериметричні задачі; математичні компетентності; міжпредметні зв'язки; математичне моделювання; STEM-освіта; дидактичний потенціал.*

Viktor LYSYTSYA
V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine
https://orcid.org/0000-0003-2303-8143
lysytsya@karazin.ua
Jose Maria Carbó GONZÁLEZ
Institute Escola Pia Mataró, Barcelona, Spain
https://orcid.org/0009-0007-1996-2866
josepm.carbo@mataro.epiaedu.cat

DIDACTIC POTENTIAL OF ISOPERIMETRIC TYPE PROBLEMS IN THE SCHOOL COURSE OF MATHEMATICS

Abstract. *The article examines the problem of the formation of mathematical competencies of students in the modern conditions of reforming school education. The relevance of the topic is due to the presence of difficulties for schoolchildren when solving applied problems. Particular attention is paid to isoperimetric problems as an effective means of implementing the competence approach in teaching mathematics. Their didactic potential in the formation of students' skills of mathematical modeling, optimization and research activities is revealed. The historical origins of isoperimetric problems are analyzed, in particular the ideas of Zenodor, who proved that among polygons with a given perimeter, a regular polygon has the largest area, and a circle among all figures. It is shown that these ideas reflect the fundamental principle of optimality and symmetry, which remains relevant in modern mathematical education. The paper analyzes Ukrainian and foreign educational materials on the use of isoperimetric problems in the school course of mathematics. It has been established that such problems are widely used in the study of geometry, algebra and mathematical analysis, but their potential for the integration of knowledge and the development of competencies is not fully used. The paper proposes approaches to the design of problems that combine applied content and intramathematical ideas, which allows taking into account the interests of students of different educational areas. The expediency of using modern digital tools, such as GeoGebra, Desmos and others for the implementation of research teaching methods, which contributes to the development of logical and critical thinking, the ability to put forward and test hypotheses, is substantiated. Examples of practical problems* *on isoperimetry are given, for the solution of which it is enough to know the properties of quadratic functions. It is concluded that the systematic use of isoperimetric problems contributes to the formation of a holistic view of mathematical patterns, the development of interdisciplinary and intra-subject relationships, as well as the effective implementation of STEM/STEAM/STREAM approaches in teaching mathematics.*

Keywords: *isoperimetric problems; mathematical competencies; interdisciplinary connections; mathematical modeling; STEM education; didactic potential.*

Постановка проблеми. В останні роки українська школа зіткнулась з новими вимогами до формування у школярів математичних компетентностей. Одним з чинників, який прискорив впровадження змін у підходах до навчання математики, стали результати міжнародного тестування PISA. Результати тестувань 2018 та 2022 років наведено у джерелах [8; 10]. Аналіз результатів показав, що українські школярі (віком 15 років) зіткаються з труднощами при розв'язанні задач прикладного характеру. Отже необхідність змін у шкільній освіті стала очевидною. В першу чергу розроблялись нові стандарти, які повинні відповідати світовим тенденціям розвитку освіти. Вимоги стандартів освіти [5; 6] певному сенсі стали викликом для вчителів шкіл. Вони зіткнулись з новими поняттями, такими як «компетентнісний підхід», «STEM-освіта» (Science, Technology, Engineering, Mathematics). Нещодавно з'явились поняття STEAM-освіта (додалась літера A – Art) і STREAM-освіта (R – Reading/wRiting – читання/письмо). Ці інноваційні підходи до навчання вимагають об'єднання природничих наук, технологій, інженерії, математики, а останнім часом ще й мистецтва, читання/письма в єдину освітню систему.

Стосовно компетентнісного підходу у навчанні, то й тут у вчителів виникають проблеми. Саме поняття «компетентнісний підхід» вимагає від учнів не просто знань формул, але й застосування їх для розв'язання реальних задач «для життя». Для цього ці задачі треба знайти. Крім того, що оновлюються підручники з математики під нові стандарти, треба ще й оновлювати збірники задач. Що стосується математики, то можна було б відокремити поняття компетентнісного підходу у математиці для природничого, економічного, гуманітарного напрямків від компетентнісного підходу для школярів, яких цікавить математика як наука. Учнів з математичним складом міркування цікавлять задачі з фундаментальними математичними ідеями, які поєднують різні розділи математики. Такі задачі часто виникають всередині самої математики при розвиненні, узагальненні вже відомих задач. Дана робота присвячена проблемі використання і створення задач, які можна використовувати як в прикладних цілях, так і в «чистій» математиці.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблема використання прикладних задач у шкільному курсі математики розглядалась у роботі [11]. В цій роботі наведено задачі прикладного характеру і критерії їх створення. Розв'язання переважної більшості запропонованих авторами задач вимагає знання геометрії. Зазначимо, що прикладні задачі широко використовуються в шкільних курсах математики закордонних країн. Одна з таких задач пов'язана з легендою про Дідону: *Міфічна фінікійська цариця Дідона (IX ст. до н. е.) з певних причин вимушена була втекти з Тіра. Вона оселилася на північному узбережжі Африки біля фінікійської колонії Утіки. З нею була невелика кількість земляків. Місцевий володар Ярбас пообіцяв надати їй стільки землі, скільки вона зможе обійняти шкірою з вола. Дідона розрізала шкіру на вузенькі смужки й охопила ними територію, на якій заснувала місто Карфаген.*

Ця легенда є класичним прикладом ізопериметричної задачі: як при фіксованому периметрі охопити найбільшу площу. Легенда про Дідону не була початком наукового дослідження, але стала яскравою ілюстрацією цієї задачі й часто використовується для її пояснення. Перші відомі міркування про ізопериметричні властивості з'являються ще в античній Греції. Зенодор (II ст. до н.е.) написав трактат «Про ізопериметричні фігури». В цій роботі він доводив, що серед багатокутників з однаковим периметром найбільшу площу має правильний багатокутник. Крім того він доводив, що правильний многокутник з більшою кількістю сторін з тим же периметром має більшу площу, а круг з тим же периметром має площу більшу, ніж правильний многокутник. У роботі [17] є цілий розділ, присвячений ідеям Зенодора. У роботі [3] є згадка про ідеї Зенодора і легенду про Дідону. Ці ідеї продовжували розвиватись іншими античними математиками. Строгі докази з'явилися вже значно пізніше, аж у XVII–XIX століттях. На ізопериметричну задачу можна подивитись і під іншим кутом. Яка фігура при заданій площі має найменший периметр. У загальному вигляді ізопериметрична задача розв'язується методами, які виходять далеко за межі шкільної програми, але якщо обмежитись певними класами фігур, то можна розглядати задачі, які цілком під силу школярам.

Задачі ізопериметричного типу (задачі на максимум площі за фіксованого периметра, задачі на мінімум периметра при заданій площі) широко застосовуються у математичній освіті як України, так і різних країн як приклади задач оптимізації, математичного моделювання та міжпредметних STEM-завдань. Вони дозволяють поєднувати геометрію, аналіз, прикладну математику та реальні практичні ситуації. В українських підручниках такі задачі можна знайти, наприклад, у [1; 4; 9]. У багатьох країнах ці задачі розглядаються під час вивчення геометрії площ і периметрів або екстремальних задач, наприклад, у підручниках США [18; 21], Великобританії [14; 20], Іспанії [12], Німеччини [16]. У згаданих підручниках ізопериметричні задачі розглядаються у певних класах геометричних фігур. Ми зараз не будемо розглядати просторові задачі. Обмежимось задачами на площині. У більшості випадків розглядаються практичні ситуації, які зводяться до наступної геометричної задачі: *серед усіх прямокутників із заданим периметром знайти той, який має найбільшу площу*. Модернізований варіант цієї задачі: *знайти розміри прямокутної огорожі при заданому периметрі, одна сторона якої прилягає до стіни, щоб вона охоплювала максимальна площу*. З іншого боку розглядаються задачі, коли треба знайти розміри прямокутної ділянки заданої площі, щоб вона мала найменший периметр.

Отже, як показує аналіз українських і закордонних підручників, задачі ізопериметричного типу активно використовуються у викладанні математики в школі як засіб розвитку математичних компетентностей, але можливості задач такого типу ще не повністю вичерпані.

Мета дослідження: Метою статті є аналіз дидактичних можливостей задач ізопериметричного типу, теоретичне обґрунтування їх ролі у формуванні ключових математичних компетентностей (моделювання, оптимізація, дослідницька діяльність), а також розробка принципів конструювання системи таких задач з урахуванням міжпредметних і внутрішньопредметних зв'язків у сучасній шкільній математичній освіті.

Методи дослідження. У даному дослідженні використано такі методи наукового пізнання як аналіз нормативних документів України, аналіз та синтез навчальної та наукової літератури українських й іноземних авторів, довідкової літератури, узагальнення отриманих відомостей.

Виклад основного матеріалу дослідження.

Ідеї Зенодора у шкільному курсі математики. Насамперед, розглянемо задачу про огорожу, яка зустрічається в усіх згаданих у вступній частині підручниках: які розміри мають бути у прямокутної ділянки при фіксованому периметрі L, щоб площа прямокутника була максимальною. Що стосується практичного використання цієї математичної задачі, то тут все залежало від фантазії авторів: це й ділянка для полуниці, й огорожа для вигулу собак, ділянка для садиби тощо. Ця задача розглядається вже у 8 класі, коли вивчається квадратична функція [2]. Якщо маємо фіксований периметр L, то можемо ввести змінну величину x – довжина однієї із сторін прямокутника. Тоді інша сторона прямокутника матиме довжину $\frac{L}{2} - x$ і ми можемо записати функцію площі прямокутника $S(x) = x(\frac{L}{2} - x)$, максимум якої потрібно знайти. Тут треба звертати увагу учнів на те, що це не просто задача на пошук найбільшого значення функції взагалі, а задача на знаходження найбільшого значення функції з обмеженнями на змінну x, оскільки з умови задачі випливає, що $0 \le x \le \frac{L}{2}$. Після стандартного перетворення функція площі має вигляд: $S(x) = -\left(x - \frac{L}{4}\right)^2 + \left(\frac{L}{4}\right)^2$. Очевидно, що максимум цієї функції досягається при $x_0 = \frac{L}{4}$. Звертаємо увагу учнів на те, що $x_0 = \frac{L}{4} \in [0;\, \frac{L}{2}]$, тобто точка максимуму задовольняє обмеження. Висновком є те, що максимальну площу має квадрат зі стороною $x_0 = \frac{L}{4}$.

Ця ж сама задача зустрічається вже в старшій школі, коли вивчається похідна функції і її використання для пошуку екстремумів або найбільшого і найменшого значення функції на відрізку.

Варто звернути увагу на ще один спосіб розв'язання ізопериметричної задачі. У шкільному курсі математики часто використовується нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним: $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}, a \ge 0, b \ge 0$. Рівність досягається тільки тоді, коли $a = b$. Це є одна з класичних нерівностей, які в школі окремою темою не розглядаються, але часто використовуються для розв'язання або доведення інших нерівностей, в задачах на екстремуми тощо.

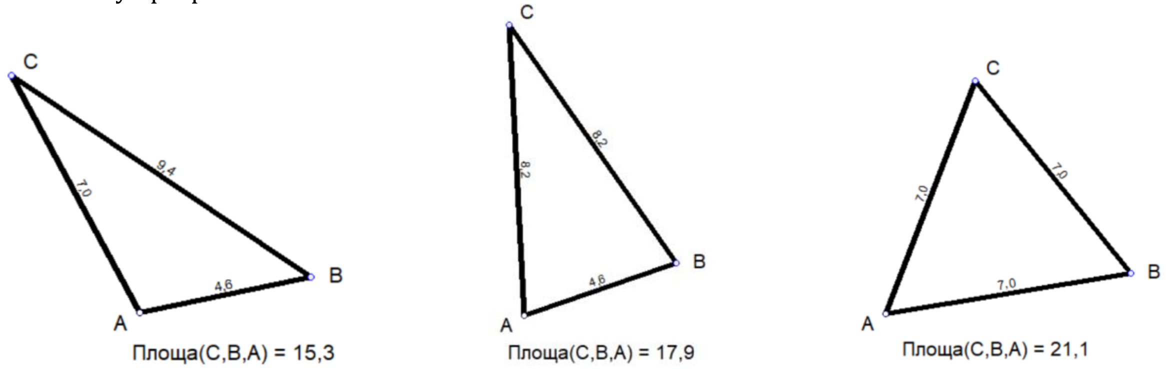
У задачі про найбільшу площу прямокутника позначимо $a = x, b = \frac{L}{2} - x$. Оскільки $0 \le x \le \frac{L}{2}$ за умовою задачі, то $a \ge 0, b \ge 0$. Крім того $a + b = \frac{L}{2}$, тобто $\sqrt{ab} = \sqrt{x(\frac{L}{2} - x)} \le \frac{L}{4}$. Площа $S(x) = x\left(\frac{L}{2} - x\right)$ досягає максимального значення при $x = \frac{L}{2} - x$, тобто при $x = \frac{L}{4}$. Шукана фігура є квадрат, площа якого $S = \frac{L^2}{4}$. Як раз на цей спосіб розв'язання ізопериметричної задачі у школі мало звертається увага.

Як показує цей простий приклад, ізопериметрична задача надає можливість продемонструвати і міжпредметні зв'язки (задачі на оптимізацію у практичних ситуаціях), так і зв'язки між різними темами у шкільній математиці – геометрія, квадратичні функції, похідні, класичні нерівності.

Вище вже було зазначено, що першим відомим автором, який розглянув ідеї оптимізації в геометрії, був Зенодор. У шкільному курсі математики ці ідеї розглядаються опосередковано і фрагментарно, хоча вони присутні у низці тем. При цьому ім'я Зенодора і його основні ідеї не згадуються. Разом з тим ці ідеї мають значний дидактичний потенціал у навчанні математики. Основний результат Зенодора полягає в тому, що серед усіх многокутників із заданим периметром найбільшу площу має правильний многокутник, а серед усіх плоских фігур – круг. Ця ідея фактично відображає загальний принцип оптимальності та симетрії, який є фундаментальним для сучасної математики (ідеї впровадження симетрії в шкільному курсі математики розглянуто у роботі [7]). Доречно підкреслити, що нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним є аналітичним аналогом геометричного твердження Зенодора про оптимальність симетричних конфігурацій.

У шкільному курсі геометрії розглядаються властивості правильних многокутників і кола, задачі на обчислення площ і периметрів. Але ці питання, як правило, подаються без акценту на їх об'єднувальну ідею – залежність оптимальних властивостей фігури від ступеня її симетрії. Об'єднання ідей Зенодора дозволяє встановити тісні зв'язки між алгебраїчним і геометричним матеріалом, що дозволяє сформувати в учнів цілісне уявлення про математичні закономірності.

Навчання через відкриття. Важливим і доцільним для розвитку математичних компетентностей в учнів є впровадження в навчальний процес задач дослідницького характеру, спрямованих на самостійне відкриття учнями принципу ізопериметричної оптимальності. Такі завдання сприяють розвитку математичного мислення, зокрема вміння узагальнювати, робити припущення та обґрунтовувати їх. Наприклад, учням можна запропонувати дослідити, який трикутник має найбільшу площу при заданому периметрі. Спочатку поставити завдання: як побудувати який-небудь трикутник із заданим периметром? Для побудов і проведення геометричних експериментів можна використовувати сучасні платформи (наприклад, GeoGebra, Desmos, DG тощо). Такі програми дають можливість проводити експерименти у динаміці. На рис. 1 наведено результати експерименту, здійсненого у програмі DG.



a) b) c)

Рис. 1 Порівняння площ трикутників з однаковим периметром

На рис. 1a) дано різносторонній трикутник, на рис. 1b) – рівнобедрений трикутник, одна сторона якого дорівнює одній із сторін трикутника 1a), на рис. 1c) дано рівносторонній трикутник. Периметри усіх трикутників однакові, але площа зростає, чим більш симетричною стає фігура. У програмі DG можна провести будь-яку кількість побудов і побачити, що площі усіх різносторонніх трикутників із заданим периметром менша, ніж площа рівностороннього (правильного) трикутника. Отже експеримент дозволяє висунути гіпотезу, що серед усіх трикутників із заданим периметром найбільшу площу має рівносторонній трикутник. Цю гіпотезу учні повинні або спростувати (наводячи контрприклад), або довести. Наведемо приклад одного з доведень гіпотези.

Розглянемо довільний трикутник ABC зі сторонами a, b, c і з периметром P. Нехай $p = \frac{a+b+c}{2}$. За формулою Герона площа трикутника має вигляд $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Оскільки периметр P величина фіксована, то площа трикутника набуватиме максимального значення, коли максимальним буде добуток $(p-a)(p-b)(p-c)$. Зазначимо, що $(p-a)+(p-b)+(p-c)=p$. Із нерівності між середнім арифметичним і середнім геометричним випливає, що максимум добутку буде тільки тоді, коли множники рівні, тобто $a=b=c$. А це означає, що трикутник рівносторонній. Тут знову використовується класична нерівність.

Далі учням можна запропонувати обчислити площі правильного трикутника, квадрата, правильного шестикутника і круга при однаковому периметрі L. При виконанні завдання учні згадають формули площ правильних фігур, знайдуть зв'язок між площею і периметром. Підрахунки дають наступні результати: $S_1 = \frac{L^2\sqrt{3}}{36}$ – площа правильного трикутника, $S_2 = \frac{L^2}{16}$ – площа квадрата, $S_3 = \frac{L^2\sqrt{3}}{24}$ – площа правильного шестикутника, $S_4 = \frac{L^2}{4\pi}$ – площа круга. Нескладно перевірити, що $S_1 < S_2 < S_3 < S_4$. На цьому прикладі учнів можна підвести до наступного запитання: як змінюватиметься площа правильного многокутника при фіксованому периметрі якщо кількість сторін буде збільшуватись? Ця задача розглядалась ще Зенодором [3]. У роботі [15] запропоновано експериментальний шлях для розв'язання цієї задачі з використанням інструментарію GeoGebra. Автори статті досліджують взаємозв'язок між стародавнім Quadrivium і сучасними освітніми технологіями STEM/STEAM/STREAM. Вони розглядають класичну ізопериметричну задачу через зв'язок математики, природничих наук, інженерію і музику. Своє дослідження вони проводять відповідно до проекту математичної старшої школи в університеті Селерно (Італія).

Історичний контекст. Ще в часи античності сформувались системи навчання Trivium (три шляхи) і Quadrivium (чотири шляхи). Ці системи були основою освіти в античності та середньовіччі.

Trivium складався з трьох гуманітарних дисциплін: граматика – вміння правильно читати й писати; риторика – мистецтво переконливо говорити; логіка (або діалектика) – уміння мислити й будувати аргументи. Головна мета – навчити людину: правильно розуміти інформацію (граматика); мислити логічно (логіка); виражати думки (риторика). Тобто тривіум – це основа мислення і комунікації.

Після опанування тривіуму студенти переходили до вищого рівня – квадривіуму: арифметика – вивчення чисел самих по собі; геометрія – числа у просторі (форми, розміри, фігури); музика – числа в часі (ритм, гармонія, пропорції звуків); астрономія – числа у просторі й часі (рух небесних тіл). Дисципліни квадривіуму об'єднані ідеєю: світ можна зрозуміти через числа та їхні закономірності. Це була спроба пояснити гармонію Всесвіту через математику.

Чи це не нагадує нам STEM/STEAM/STREAM-освіту?

Сучасний погляд на Trivium і Quadrivium можна знайти, наприклад, в роботах [13; 22].

Розподіл площ між правильними фігурами. Вище ми зосередили увагу на оптимізаційну задачу з однією фігурою. Але можна розглядати задачі про оптимальний розподіл між кількома об'єктами, які відіграють важливу роль як у теоретичній, так і в прикладній діяльності людини, оскільки відображають реальні ситуації обмеженості ресурсів і необхідності прийняття ефективних рішень. Вони дозволяють знаходити найкращі способи використання площі, часу, матеріалів або фінансів, що є особливо актуальним у будівництві, економіці, дизайні та інших сферах. Розв'язування таких задач сприяє розвитку логічного та критичного мислення, формує вміння аналізувати умови, будувати математичні моделі та обґрунтовувати вибір оптимального варіанта. Крім того, ці задачі мають тісний зв'язок із різними розділами математики такими, як математичний аналіз, алгебра, геометрія, що підкреслює їх значення у впровадженні STEM/STEAM освіти у навчанні. Отже, вивчення задач на оптимальний розподіл з одного боку поглиблює математичні знання учнів, а з іншого – готує їх вирішення практичних проблем у реальному житті.

Наведемо приклади задач, які можуть бути цікавими як чисто з математичної точки зору, так і у життєвих ситуаціях. Ми не будемо наводити розв'язки задач детально. Розглянемо тільки ключові моменти розв'язування задач.

Задача 1. *Які розміри повинні мати правильний многокутник і круг при заданому сумарному периметрі, щоб сумарна площа цих фігур була мінімальною? Дослідити, при яких умовах сумарна площа буде максимальною?*

Нехай довжина сумарного периметра буде L. Виділимо для периметра правильного многокутника довжину *x*, тоді для периметра кола залишиться довжина *(L-x)*. Скористаємось формулою для площі правильного многокутника: $S=\frac{na^2}{4tg\frac{\pi}{n}}$, де n – кількість сторін многокутника, a – довжина сторони многокутника. Оскільки периметр многокутника *x*, то довжина його сторони є $\frac{x}{n}$ і площа $S_1(x)=\frac{x^2}{4ntg\frac{\pi}{n}}$. Використовуючи довжину кола *(L-x)*, знаходимо площу круга $S_2(x)=\frac{(L-x)^2}{4\pi}$. Нам треба знайти мінімум функції $S(x)=S_1(x)+S_2(x)$ при обмеженні $0\le x\le L$. Функція $S(x)$ є квадратичною з додатним коефіцієнтом при x^2. Знаходимо точку мінімуму $x_0=\frac{n\cdot L\cdot tg\frac{\pi}{n}}{n\cdot tg\frac{\pi}{n}+\pi}$. Оскільки $0\le x_0\le L$, то мінімум функції $S(x)$ при обмеженні $0\le x\le L$ буде у точці x_0. Знаходимо, що це $S(x_0)=\frac{L^2}{4\left(\pi+ntg\frac{\pi}{n}\right)}$.

Для знаходження найбільшого значення функції при тому ж обмеженні достатньо обчислити функцію $S(x)$ при *x=0* і *x=L* і вибрати більше з них. Це буде, коли *x=0*. Тобто, весь периметр треба «віддати» для круга. Такий висновок можна зробити і з логічних міркувань, використовуючи загальну ізопериметричну нерівність.

Задача 2. (Зенодор) *Довести, що серед двох правильних многокутників з однаковим периметром більшу площу має той, у якого більше сторін. Круг з тим же периметром має площу більшу за площу правильного многокутника.*

Античні геометри розв'язували цю задачу на рівні інтуїції. Для невеликої кількості сторін це перевіряється безпосереднім обчисленням. Завдання: розгляньте правильні фігури – трикутник, квадрат, п'ятикутник, шестикутник, круг. Для правильних многокутників з довільною кількістю сторін ця задача стає більш складною.

Задача 3. *Власнику земельної ділянки треба розподілити огорожу заданої довжини між двома функціональними зонами: фонтан – круг і зона відпочинку – квадрат. Припустимо, що облаштування квадратного метру кожної функціональної зони має однакову вартість. Власнику треба оптимізувати* *розміри функціональних зон як для зменшення зайнятої ними площі, так і для зменшення витрат на облаштування. Якими повинні бути розміри функціональних зон, щоб зайнята ними сумарна площа при заданому периметрі була мінімальною?*

Ця задача доступна учням 8 класу, бо зводиться до дослідження квадратичної функції.

Задача 4. *Підприємцю треба розмістити рекламу на двох банерах, один з яких має форму правильного трикутника, інший – форму квадрата. Загальна довжина краю двох банерів фіксована. Квадратна одиниця будь-якого банеру коштує однаково. Якими повинні бути розміри банерів, щоб підприємець заплатив найменшу ціну за рекламу?*

З математичної точки зору ця задача розглядалась у роботі [19].

Задача 5. *Дорожні знаки мають форму правильного трикутника, квадрата, правильного шестикутника, круга. Ціна на виготовлення дорожнього знаку залежить від його площі. Будь-яка пара знаків має один і той же сумарний периметр. Скільки пар знаків можна скласти? Яка пара знаків коштуватиме найдешевше?*

Наведені задачі доступні учням 8 класу, бо для їх розв'язання достатньо знати властивості квадратичної функції. На уроках, або в якості домашніх завдань, учням можна запропонувати придумати подібні задачі.

Принципи конструювання задач ізопериметричного типу. Виходячи з аналіз українських і зарубіжних навчальних матеріалів щодо використання ізопериметричних задач у шкільному курсі математики, пропонуємо основні дидактичні принципи конструювання задач ізопериметричного типу.

Принцип оптимізації: у задачах повинна відображатись ідея оптимізації, властива задачам ізопериметричного типу, що дозволяє формувати в учнів уявлення про ефективність рішень.

Принцип міжпредметної інтеграції (STEM/STEAM/STREAM): зміст задач має забезпечувати зв'язок математики з реальними сферами людської діяльності (будівництво, дизайн, економіка тощо), що сприяє формуванню прикладних компетентностей.

Принцип внутрішньопредметних зв'язків: задачі повинні інтегрувати різні розділи математики – геометрію, алгебру, аналіз, що забезпечить цілісність математичних знань.

Принцип дослідницької спрямованості: задачі повинні стимулювати проведення експериментів з використанням цифрових технологій, висування гіпотез, самостійне відкриття закономірностей.

Принцип прикладної спрямованості: задачі повинні моделювати різноманітні реальні ситуації – оптимізація площ, розподіл ресурсів, інженерні задачі тощо.

Висновки і перспективи подальших досліджень. У роботі проведено аналіз сучасних освітніх тенденцій, який показує необхідність посилення прикладної складової навчання математики та розвитку математичних компетентностей учнів.

Одним з ефективних інструментів формування компетентнісного підходу є задачі ізопериметричного типу, оскільки вони поєднують математичну теорію з практичними ситуаціями та задачами оптимізації. Ще в часи античності задачам оптимізації приділялась значна увага. Зокрема, ідеї Зенодора і сьогодні мають значний дидактичний потенціал і можуть бути використані як змістова основа для узагальнення знань учнів про зв'язок між симетрією та оптимальністю. Використання ізопериметричних задач дозволяє встановити тісні зв'язки між різними розділами математики (геометрія, алгебра, аналіз), а також сприяє інтеграції з іншими галузями знань в межах STEM/STEAM/STREAM-підходів.

У роботі пропонується використовувати цифровий інструментарій для впровадження навчання через відкриття, що сприяє розвитку в учнів критичного мислення, здатності висувати гіпотези та обґрунтовувати їх. Запропоновані принципи створення задач дозволяють розширити дидактичні можливості ізопериметричних задач як у прикладному, так і в теоретичному аспектах навчання математики.

У даній роботі розглянуто задачі, які можна розв'язувати на рівні знань квадратичної функції. Перспективи подальших досліджень пов'язані з розробкою системи задач ізопериметричного типу для профільних класів з використанням просторових тіл, із застосуванням похідної. Розв'язання таких задач передбачає знання математики старших класів: стереометрії, початків аналізу. Актуальним залишається використання цифрового інструментарію для дослідницької роботи учнів.

Конфлікт інтересів. Автори заявляють про відсутність фінансових, особистих чи інших інтересів, що можуть викликати конфлікт щодо публікації даної статті.

Джерела фінансування. Дослідження не отримувало зовнішнього фінансування.

Доступність даних. Це дослідження не передбачало використання окремих наборів даних.

Використання засобів штучного інтелекту (ШІ). Під час підготовки цієї роботи автори не використовували інструменти штучного інтелекту.

Список використаних джерел

1. Бурда, М. І., Тарасенкова, Н. А., Богатирьова, І. М., Коломієць, О. М., & Сердюк, З. О. (2020). *Геометрія. Підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти (профільний рівень).* Оріон.
2. Василишин, М. С., Миляник, А. І., Працьовитий, М. В., Простакова, Ю. С., & Школьний, О. В. (2023). *Модельна навчальна програма «Математика. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти* (НОН України № 883 від 24.07.2023)
3. Іванова, Н. (2026). *Історія математики у культурній спадщині Європи. Т. 1: Давній світ, математика корінних народів Америки*. Інститут математики НАН України. https://imath.kiev.ua/books/1/
4. Істер, О. (2025). *Геометрія. Підручник для 8 класу класу закладів загальної середньої освіти*. Генеза.
5. Кабінет Міністрів України. (2020). *Про деякі питання державних стандартів базової середньої освіти* (Постанова №989. https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-deyaki-pitannya-derzhavnih-standartiv-povnoyi-zagalnoyi-serednoyi-osviti-i300920-898
6. Кабінет Міністрів України. (2024). *Про затвердження Державного стандарту профільної середньої освіти* (Постанова №851). https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-zatverdzhennia-derzhavnoho-standartu-profilnoi-serednoi-osvity-851-250724
7. Лисиця, В.Т., & Ломоносова, Н.О. (2025). Симетрія як інструмент формування міжпредметних зв'язків і розвитку математичних компетентностей. *Актуальні питання у сучасній науці*, *11* (41), 1639-1653. https://doi.org/10.52058/2786-6300-2025-11(41)-1639-1653
8. Мазорчук, М. (осн. автор), Вакуленко, Т., Терещенко, В., Бичко, Г., Шумова, К., Раков, С., Горох, В., та ін. (2019). *Національний звіт за результатами міжнародного дослідження якості освіти PISA-2018*. Український центр оцінювання якості освіти. https://pisa.testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2019/12/PISA_2018_Report_UKR.pdf
9. Мерзляк, А., & Якір, М. (2024). *Геометрія. Підручник для 7 класу закладів загальної середньої освіти*. Гімназія.
10. Овсяннікова, Л. (Перекл.), & Терещенко, В. (Наук. ред.) (2024). *Результати PISA 2022. Том І. Стан навчання та рівності в освіті.* Український центр оцінювання якості освіти. https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2024/08/Mizhnarodnyj-zvit-PISA-2022-T1.pdf
11. Швець, В., & Прус, А. (2026). Система прикладних задач з математики: критерії створення, особливості розв'язування. *Фізико-математична освіта*, *41*(1), 37-47. https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i1-06
12. Alcaide, F., Hernández, J., Moreno, M., Sanz, L., & Serrano, E. (2017). *Matemàtiques aplicades a les ciències socials*. Cruïlla.
13. Bugliarello, G. (2023) A New Trivium and Quadrivium. *Bulletin of Science, Technology & Society*, 23(2). https://doi.org/10.1177/0270467603251296
14. Cambridge University Press. (2018). *Cambridge International AS & A Level Mathematics. Pure Mathematics 1.* https://www.scribd.com/document/790571225/2018-Cambridge-International-as-a-Level-Mathematics-Pure-Mathematics-1
15. De Castris, R., Tortoriello, F. S., & Veronesi I. (2025). Exploring the integration of Mathematics and Music within the STEAM Framework. In *Proceedings of the 11th International Conference on Higher Education Advances (HEAd'25)* (pp. 9-17). https://doi.org/10.4995/HEAd25.2025.20116
16. Ernst Klett Verlag. (2018). *Lambacher Schweizer: Mathematik für Gymnasien (Analysis)*. https://asset.klett.de/assets/dabf6df7/DO01_735380_Teildruck_gesamt_mWZ.pdf
17. Heath, T. (1921). *A History of Greek Mathematics*. (Vol. 2). Clarendon Press. https://archive.org/details/historyofgreekma029268mbp/page/n7/mode/2up
18. Larson, R. (2014) *Precalculus with Limits*. Houghton Mifflin Harcourt. http://www.cobaehtolcayuca.com/LECTURAS/Calculo%20Larsson%208%20edicion.pdf
19. Lysytsya, V., & Gonsalez, J. (2026). Isoperimetric problems as an effective means of developing mathematical thinking. In *Proceedings of the IV International Conference in honor of O. V. Pogorelov* (pp. 204-206). https://pogorelov.karazin.ua/2026/wp-content/uploads/2026/04/Tezy_Pohorielov_2026.pdf
20. Pearson Education. (2018). *Edexcel AS & A Level Mathematics: Pure Mathematics Year 1*. https://www.scribd.com/document/536766882/389788543-Edexcel-Pure-Maths-Year-1
21. Stewart, J. (2016). *Calculus: Early Transcendentals* (8th ed.). Cengage Learning. https://studylib.net/doc/27155396/calculus-early-transcendentals-8th-ed--2015-?p=369#google_vignette
22. Valleriani, M. (2022). From the Quadrivium to Modern Science. *HoSt – Journal of History of Science and Technology*, 16(1). https://doi.org/10.2478/host-2022-0007

References

1. Burda, M. I., Tarasenkova, N. A., Bohatyrova, I. M., Kolomiiets, O. M., & Serdiuk, Z. O. (2020). *Heometriia. Pidruchnyk dlia 11 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity (profilnyi riven)*. Orion. (in Ukrainian)
2. Vasylyshyn, M. S., Myliianyk, A. I., Pratsiovytyi, M. V., Prostakova, Yu. S., & Shkolnyi, O. V. (2023). *Modelna navchalna prohrama "Matematyka. 7–9 klasy" dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity* (MON Ukrainy № 883 vid 24.07.2023). (in Ukrainian)
3. Ivanova, N. (2026). *Istoriia matematyky u kulturnii spadshchyni Yevropy. T. 1: Davnii svit, matematyka korinnykh narodiv Ameryky*. Instytut matematyky NAN Ukrainy. https://imath.kiev.ua/books/1/ (in Ukrainian)
4. Ister, O. (2025). *Heometriia. Pidruchnyk dlia 8 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity*. Heneza. (in Ukrainian)
5. Kabinet Ministriv Ukrainy. (2020). *Pro deiaki pytannia derzhavnykh standartiv bazovoi serednoi osvity* (Postanova № 989). https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-deyaki-pitannya-derzhavnih-standartiv-povnoyi-zagalnoyi-serednoyi-osviti-i300920-898 (in Ukrainian)
6. Kabinet Ministriv Ukrainy. (2024). *Pro zatverdzhennia Derzhavnoho standartu profilnoi serednoi osvity* (Postanova № 851). https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-zatverdzhennia-derzhavnoho-standartu-profilnoi-serednoi-osvity-851-250724 (in Ukrainian)

7. Lysytsya, V. T., & Lomonosova, N. O. (2025). Symetriia yak instrument formuvannia mizhpředmetnykh zviazkiv i rozvytku matematychnykh kompetentnostei. *Aktualni pytannia u suchasnii nautsi*, (11(41)), 1639-1653. https://doi.org/10.52058/2786-6300-2025-11(41)-1639-1653 (in Ukrainian)
8. Mazorchuk, M., Vakulenko, T., Tereshchenko, V., Bychko, H., Shumova, K., Rakov, S., Horokh, V., et al. (2019). *Natsionalnyi zvit za rezultatamy mizhnarodnoho doslidzhennia yakosti osvity PISA-2018*. Ukrainskyi tsentr otsiniuvannia yakosti osvity. https://pisa.testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2019/12/PISA_2018_Report_UKR.pdf (in Ukrainian)
9. Merzliak, A., & Yakir, M. (2024). *Heometriia. Pidruchnyk dlia 7 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity*. Himnaziia.
10. Ovsiannikova, L. (Perekl.), & Tereshchenko, V. (Nauk. red.). (2024). *Rezultaty PISA 2022. Tom I. Stan navchannia ta rivnosti v osviti*. Ukrainskyi tsentr otsiniuvannia yakosti osvity. https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2024/08/Mizhnarodnyj-zvit-PISA-2022-T1.pdf (in Ukrainian)
11. Shvets, V., & Prus, A. (2026). Systema prykladnykh zadach z matematyky: kryterii stvorennia, osoblyvosti rozviazuvannia. *Fizyko-matematychna osvita*, 41(1), 37-47. https://doi.org/10.31110/fmo2026.v41i1-06 (in Ukrainian)
12. Alcaide, F., Hernández, J., Moreno, M., Sanz, L., & Serrano, E. (2017). *Matemàtiques aplicades a les ciències socials*. Cruïlla.
13. Bugliarello, G. (2023) A New Trivium and Quadrivium. *Bulletin of Science, Technology & Society*, 23(2). https://doi.org/10.1177/0270467603251296
14. Cambridge University Press. (2018). *Cambridge International AS & A Level Mathematics. Pure Mathematics 1.* https://www.scribd.com/document/790571225/2018-Cambridge-International-as-a-Level-Mathematics-Pure-Mathematics-1
15. De Castris, R., Tortoriello, F. S., & Veronesi I. (2025). Exploring the integration of Mathematics and Music within the STEAM Framework. In *Proceedings of the 11th International Conference on Higher Education Advances (HEAd'25)* (pp. 9-17). https://doi.org/10.4995/HEAd25.2025.20116
16. Ernst Klett Verlag. (2018). *Lambacher Schweizer: Mathematik für Gymnasien (Analysis)*. https://asset.klett.de/assets/dabf6df7/DO01_735380_Teildruck_gesamt_mWZ.pdf
17. Heath, T. (1921). *A History of Greek Mathematics*. (Vol. 2). Clarendon Press. https://archive.org/details/historyofgreekma029268mbp/page/n7/mode/2up
18. Larson, R. (2014) *Precalculus with Limits*. Houghton Mifflin Harcourt. http://www.cobaehtolcayuca.com/LECTURAS/Calculo%20Larsson%208%20edicion.pdf
19. Lysytsya, V., & Gonsalez, J. (2026). Isoperimetric problems as an effective means of developing mathematical thinking. In *Proceedings of the IV International Conference in honor of O. V. Pogorelov* (pp. 204-206). https://pogorelov.karazin.ua/2026/wp-content/uploads/2026/04/Tezy_Pohorielov_2026.pdf
20. Pearson Education. (2018). *Edexcel AS & A Level Mathematics: Pure Mathematics Year 1*. https://www.scribd.com/document/536766882/389788543-Edexcel-Pure-Maths-Year-1
21. Stewart, J. (2016). *Calculus: Early Transcendentals* (8th ed.). Cengage Learning. https://studylib.net/doc/27155396/calculus-early-transcendentals-8th-ed--2015-?p=369#google_vignette
22. Valleriani, M. (2022). From the Quadrivium to Modern Science. *HoSt – Journal of History of Science and Technology*, 16(1). https://doi.org/10.2478/host-2022-0007

| Матеріал надійшов до редакції: 23.02.2026 р. | Прийнято до друку: 30.03.2026 р. | Опубліковано: 30.04.2026 р. |