УДК 372.851.046.16

В.К. Кірман
Дніпропетровський національний
університет імені Олеся Гончара

ПІДХОДИ ДО ОБҐРУНТУВАННЯ ГРАНИЧНИХ ТЕОРЕМ ДЛЯ БІНОМІАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ

У статті запропоновано побудову схеми викладу матеріалу щодо локальної теореми Муавра-Лапласа та інтегральної теореми Лапласа на інтуїтивному рівні з використанням неформальних міркувань, доступних як для учнів старших класів, де поглиблено вивчається математика, так і для студентів технічних та економічних спеціальностей вищих навчальних закладів. У теоретичному обґрунтуванні пропонується вести мову про аргументацію математичних тверджень при навчанні математики. Ілюструється, що саме поняття аргументації носить не лише формально-логічний характер, а в тому числі комунікативний та ціннісно-емоційний. Ілюструється аргументація на декількох рівнях: експериментально-індуктивному (L1), аналогії (L2), наочно-інтуїтивному (L3), напівформальному (L4), формальному (L5), суперформальному (L6). Наочно-інтуїтивні та напівформальні аргументації розглядаються як автономні так і в системі послідовної аргументації, де здійснюється поступовий перехід від експериментального до формального рівня аргументації.

***Ключові слова**: граничні теореми, біноміальний розподіл, рівні аргументації, неформальні доведення.*

Постановка проблеми. Граничні теореми посідають центральне місце в курсах теорії ймовірностей. У той же час, доведення відповідних фактів є зрозуміло дуже складним для студентів нематематичних спеціальностей, тому практично при викладанні відповідних курсів доведення не наводяться. Так, наприклад, робиться у класичних підручниках В.Є. Гмурмана [2]. Але абсолютно ясно, що це є вимушена міра, бо вивчення математики без доведень є неповноцінним. Вперше в найпростішому вигляді граничні теореми формулюються для біноміального розподілу. Після доведення формули Бернуллі досліджується поведінка ймовірностей числа успіхів для великої кількості випробувань, так розглядаються локальна теорема Муавра-Лапласа, інтегральна теорема Лапласа, теорема Пуассона. Щодо останньої, то її доведення є достатньо нескладним, але доведення перших з двох названих теорем, наприклад, як в підручнику І. М. Коваленка [4] є знову-таки дуже складними. Їх дуже важко реалізувати вже й для студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів через технічні труднощі.

Теорія ймовірності все більше входить в програму середньої школи як в усьому світі, так і в нашій країні. Науково-методичні основи навчання теорії ймовірностей в середніх навчальних закладах були закладені в класичних роботах А. М. Колмогорова [5], О.Я. Хінчина, А. М. Яглома [12], А. Реньї [8]. Ці видатні математики акцентують увагу на світоглядних питаннях, пов’язаних з вивченням основ теорії ймовірностей, послідовності формування ключових понять. Значний вклад в методику навчання теорії ймовірностей зроблено в роботах А. Плоцьки [7]. У той же час питання наближеного обчислення за формулою Бернуллі не розглядаються в усіх цих роботах і не висвітлені в сучасних програмах з математики, в тому числі при поглибленому вивченні. У той же час зрозуміло, що вивчення теорії ймовірності, у тому числі на початковому етапі без згадки про граничні теореми хоча б спрощеному вигляді не є повноцінним. Це чітко підкреслюється В.М. Тутубаліним [11], який підкреслює, що теорія ймовірностей починається з “дива Лапласа”.

Аналіз актуальних досліджень. Виклад матеріалу щодо локальної теореми Мувра-Лапласа та інтегральної теореми Лапласа розроблений разом з дидактичним забезпеченням для студентів математичних спеціальностей наведений в роботах В. М. Турчина [10]. Там наведені строгі схеми доведення та системи підготовчих задач, що утворює найважливіші компоненти методичної системи вивчення граничних теорем для біноміального розподілу. М.І Жалдаком, Н. М. Кузьміною, Г.О Михаліним [2] розроблено методичну систему навчання теорії ймовірностей студентів педагогічних університетів та учнів старших класів. Ці автори акцент при обґрунтуванні граничних теорем роблять на використанні чисельних експериментів, які пропонується проводити за допомогою певного інструментарію – спеціально розроблених дидактичних програмних засобів.

Б. Д. Котляром у роботі [6] будуються схеми обґрунтування граничних теорем для біноміального розподілу, орієнтовані на аудиторію слухачів технічних та техніко-економічних спеціальностей. Частина доведень носить досить інтуїтивний характер, але ключові факти знов-таки наведені з великими технічними труднощами.

Впровадженню теорії ймовірностей у практику поглибленого навчання математики присвячена дисертаційна робота О. В. Трунової [9]. У цій роботі частково наголошується на необхідності та можливості введення граничних теорем у шкільний курс математики, у той же час обґрунтування цих теорем, які були б доступні учням, не обговорюються.

Аналіз інших літературних джерел показав також, що питання побудови спрощеного обґрунтування граничних теорем для біноміального розподілу не досліджені. Отже, існує протиріччя між необхідністю ознайомлення учнів та студентів з граничними теоремами для біноміального розподілу, яке би включало обґрунтування цих фактів та можливістю обґрунтувати відповідні методи на рівні знань учнів класів з поглибленим вивченням математики та студентів техніко-економічних спеціальностей. Ці питання потребують дослідження.

Метою статті є побудова схеми викладу матеріалу щодо локальної теореми Муавра-Лапласа та інтегральної теореми Лапласа на інтуїтивному рівні з використанням неформальних міркувань, доступних як для учнів старших класів, де поглиблено вивчається математика, так і для студентів технічних та економічних спеціальностей вищих навчальних закладів

Виклад основного матеріалу. Питання навчання учнів та студентів доведенню математичних тверджень є одним з центральних у методиці навчання математики. В той же час, відомо, що мотивація діяльності по пошуку доведень залишається недосконалою. Більш того, ретельний аналіз приводить до думки, що саме поняття “доведення” має відносний характер в умовах не тільки шкільного , але й університетського курсу математики. Дійсно, доведення (вважаємо синонімом “строге, формальне доведення”) передбачає фіксацію аксіоматичної бази та правил виводу. Але в шкільному курсі аксіоматика (неповна) будується фактично лише в курсах геометрії, в початках аналізу вивчаються функції дійсного змінного без строго визначення дійсного числа. Аналогічна ситуація складається й в так званих курсах вищої математики (або їх аналогах) для студентів технічних та економічних спеціальностей вишів. Практика навчання математики в школі приводить до парадоксальних прикладів. Так, наприклад, при вивченні теореми про точку перетину медіан трикутника механічні міркування з застосуванням центру ваги вважаються нестрогими, але також не можна вважати строгим доведення з використанням, наприклад, теореми про середню лінію трикутника, де зовсім не обґрунтовується, що дві медіани перетинаються всередині трикутника, хоча це інтуїтивно очевидний факт. Не менш гострими такі питання стають у вищій школі, де формування професійної компетентності відповідного фахівця неможливе без вмінь застосовувати математичні факти строге обґрунтування яких в принципі не може бути проведено для студентів економічних та технічних спеціальностей.

Отже, фактично, в практиці викладання математики твердження, що доводяться спираються на систему так званих базових тверджень, чітку межу якої виділити дуже складно. Природно виникає питання обґрунтування базових допоміжних тверджень (яке не має вигляд строго логічного доведення), їх походження. Ми пропонуємо вести мову про *аргументацію* математичних тверджень при навчанні математики. Класична логіка розрізняє поняття *доведення* та *аргументації*, вважаючи останнє набагато ширше за змістом, для аргументації "аргумент" розуміється також набагато ширше ніж для доведення, саме поняття аргументації носить не лише формально-логічний характер, а в тому числі *комунікативний та ціннісно-емоційний*, отже його усвідомлене впровадження в практику сприятимуть реалізації особистісно-орієнтованого підходу в математичній освіті.

На нашу думку, можна виділити декілька рівнів аргументації: *експериментально-індуктивний (L1), аналогії (L2), наочно-інтуїтивний (L3), напівформальний (L4), формальний (L5), суперформальний (L6)*. Рівень L1 передбачає, що висновки робляться на основі багатьох спостережень або цілеспрямованого експерименту. Значна кількість математиків вважають вміння проводити та інтерпретувати математичний експеримент основою математичної освіти [1]. Саме на цьому рівні повинні робитися висновки у початковій школі, але й потім експеримент та індуктивні міркування залишаються потужнім інструментом. Вчителі математики знають, що емпіричний досвід побудови трикутників більш впевнить їх в ознаках рівності ніж доведення з підручнику. Експериментально можна в школі, у 6-7 класах досліджувати властивості подільності, 10-11 класах – властивості елементарних функцій тощо. Рівень L2 дозволяє робити висновки на основі розібраних задач без розгляду загального випадку, формальний опис якого містить технічні труднощі. Так, наприклад, до формального вивчення комбінаторики можна ознайомити учнів з методами розв'язування основних комбінаторних задач та комбінаторними сполуками. Рівень L3 дає можливості обґрунтовувати твердження спираючись на ілюстрації, геометричні, механічні, оптичні інтерпретації тощо. Такими є, наприклад, доведення формул включення-виключення за допомогою діаграм Ейлера, нерівності Єнсена за допомогою графіків. Попередньою сходинкою до формального стає рівень L4. Для застосування аргументацій цього рівня характерно використання "майже очевидних", але глибоких за змістом тверджень. Вище наведено приклад про медіани трикутника, можна тут також додати доведення майже всіх формул з комбінаторики шкільного курсу (правило множення не тільки не доводиться, але й чітко не формулюються). На рівні L5 чітко визначається система базових тверджень, які отримають строгі формулювання, відслідковується логічна структура доведення. Нарешті, аргументація найвищого рівня L6 передбачає використання формальних логіко-математичних мов. Актуальність використання цього рівня може різко зрости в недалекому майбутньому у зв'язку з впровадженням в навчальну практику систем штучного інтелекту.

Підкреслимо, що використання аргументації усіх рівнів сприятимуть мотивації вивчення математики і дає можливість популяризації математичних знань та їх застосувань.

Покажемо тепер як можна аргументувати локальну теорему Муавра-Лапласа теорії ймовірностей на наочно-інтуїтивному рівні. Наведемо формулювання цієї теореми [6, 123].

Теорема. Нехай $npq \to \infty$ *при* $n \to \infty$. *Тоді для цілих* m, *що задовольняють умові* $\left|\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right| \le C$ *(тут* C *– довільна, але фіксована стала)*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_n^m p^m q^{n-m}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)^2\right\}} = 1$$

Інтуїтивно, фактично можна стверджувати, що мова йде, що при певних умовах для достатньо великих значеннях n величини $p_n(k)$ наближено дорівнюють $\frac{1}{\sqrt{npq}}f(x)$, де $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Нехай $\mu = np$, $\sigma=\sqrt{npq}$. Далі розглядаємо

$$\frac{p_n(k+1)}{p_n(k)}-1=\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{p}{q}-1=\frac{np-pk-qk-q}{(k+1)q}=\frac{np-k-q}{(k+1)q},$$

Вважаючи число k достатньо великим по відношенню до 1 приходимо до наближеної рівності (нехтуємо q)

$$\frac{p_n(k+1)}{p_n(k)}-1=\frac{np-k}{kq}.$$

Робимо очевидні перетворення правої частини:

$$\frac{np-k}{kq}=\frac{np-k}{\frac{k}{np}\cdot npq}=\frac{np-k}{npq}:\frac{k}{np}.$$

Проаналізуємо тепер дільник $\frac{k}{np}$. В силу нерівності $\left|\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right|\le C$ маємо, що $k=np+\alpha C\sqrt{npq}$, тут $|\alpha|<1$. Тоді

$$\frac{k}{np}=\frac{np+\alpha C\sqrt{npq}}{np}=1+\frac{\alpha Cq}{\sqrt{npq}}.$$

Виходячи з того, що $npq\to\infty$ та обмеженість αCq, маємо, що $\frac{\alpha Cq}{\sqrt{npq}}$ нескінченно мала. Отже, $\frac{k}{np}\to 1$. Але тоді маємо наближену рівність:

$$p_n(k+1)-p_n(k)=\frac{np-k}{npq}p_n(k).$$

Застосовуючи ідею континуалізації цієї наближеної рівності приходимо до диференційного рівняння

$$\frac{dp}{dx}=\frac{\mu-x}{\sigma^2}p(x),$$

Очевидне інтегрування якого дає нам загальний розв'язок:

$$p(x)=c\cdot\exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

Невідома константа дізнається з умови нормування та через значення інтегралу Ейлера-Пуассона : $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{2\pi}$ [6, с. 37-38].

Для інтуїтивного обґрунтування інтегральної теореми Лапласа достатньо довести наближену формулу:

$$P(k_1 \le k \le k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt .$$

Тут $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$. Для цього розбиваємо проміжок $[x_1; x_2]$точками $t_k = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$, де k – натуральні числа від k_1 до k_2. Нехай $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k = \dfrac{1}{\sqrt{npq}}$. Маємо:

$$P(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} p_n(i) \approx \sum_{i=k_1}^{k_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{i - np}{\sqrt{npq}}\right)^2\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=k_1}^{k_2} \exp\left\{-\frac{1}{2} t_i^2\right\} \Delta t_i .$$

На останню суму дивимось як на інтегральну, що завершує інтуїтивне обґрунтування.

Наведені вище обґрунтування можуть бути застосовані в процесі навчання як початкові аргументації, які пояснюють чому саме такий вигляд можуть мати відповідні теореми. Важливо, щоби при формальному розгляді студенти розуміли недоліки таких "доведень". Так, наприклад, дуже важливим є питання про появу диференційованої функції замість дискретної моделі. У той же час, для технічних та економічних спеціальностей, на нашу думку, наведені вище міркування є вичерпними. Можна вести розмову про універсальну послідовність ознайомлення з даними теоремами. Вона включає три етапи. Етап перший, експериментальний. Він передбачає проведення обчислювального експерименту. Його можна реалізовувати ще на шкільному етапі вивчення теорії ймовірностей. Другий етап описаний в даній статті є роз'ясненням до третього етапу – формального доведення, який доцільно проводити лише для студентів математичних спеціальностей.

Висновки. Отже, бачимо, існує можливість ознайомити студентів та учнів класів з поглибленим вивченням математики з інтуїтивними обґрунтуваннями локальної та інтегральної теорем Лапласа для біноміального розподілу. Дана схема стає ефективною після підготовчої роботи, пов'язаної з проведенням обчислювального експерименту і може бути також застосована як пропедевтична при формальному вивченні теорії ймовірностей. У той же час залишаються у цій схемі недослідженими питання щодо коректності переходу від дискретної моделі до континуальної, більш детальне обґрунтування вибору малого параметру. Відкритим на сьогоднішній день залишається побудова аналогічних схем обґрунтувань граничних теорем для сум випадкових величин, у тому числі в найпростішому варіанті, коли усі випадкові величини мають однаковий розподіл.

Питання щодо ефективності запропонованих схем у процесі навчання може бути досліджено шляхом проведення цілеспрямованого педагогічного експерименту.

ЛІТЕРАТУРА

1. Арнольд В.И. Экспериментальная математика / В. И. Арнольд.— М.: Фазис, 2005. — 64 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов/ В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 1972. – 368 с.
3. Жалдак М.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів/ М. І. Жалдак, Н. М. Кузьміна, Г. О. Михалін. – К.: , 2006. – 492 с.
4. Коваленко И. Н. Теория вероятностей и математическая статистика/ И. Н. Коваленко, А. А. Филиппова. – М. : Высшая школа, 1973. – 368 с.
5. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей / А. Н. Колмогоров. – М.: Наука, 1974. - 119с.

6. Новікова Л. В. Теорія ймовірностей і математична статистика: навчальний посібник/ Л. В. Новікова, Б. Д. Котляр, В. І. Бичков. – К. : Техніка, 1996. – 184 с.
7. Плоцки А. Стохастические задачи и прикладная направленность в обучении математики /А. Плоцки // Математика в школе. - 1991. - №3. - С.69-71.
8. Реньї А. Заради чого необхідно викладати теорію ймовірностей/А. Реньи // Математика в школі. - 1998.- №1.- С. 31-32.
9. Трунова О. В. Навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики : дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Трунова Олена Василівна. – К., 1991. – 211 с.
10. Турчин В. Н. Теория вероятностей и математическая статистика/ В. Н. Турчин.— Д.: Изд-во Днепропетр. нац. ун-та, 2008. — 656 с.
11. Тутубалин В. Н. Теория вероятностей. Краткий курс и научно-методические замечания/ В.Н. Тутубалин. – М. : МГУ, 1972. – 228 с.
12. Хінчин О.Я., Яглом А.М. Перше знайомство з теорією ймовірності / О. Я. Хінчин, А. М. Яглом // Математична хрестоматія. – К.: Освіта, 1968.- С. 183-199.

РЕЗЮМЕ

Кирман В.К. Подходы к обоснованию предельных теорем для биномиального распределения. *В статье предложена схема изложения материала, связанного с локальной теоремой Муавра-Лапласа и интегральной теоремы Лапласа на интуитивном уровне с использованием неформальных рассуждений, доступных как для учащихся старших классов, где углубленно изучается математика, так и для студентов технических и экономических специальностей высших учебных заведений. В теоретическом обосновании предлагается вести речь про аргументацию математических утверждений при обучении математике. Показано, что понятие аргументации носит не только формально-логический характер, но также коммуникативный и ценностно-змоциональный. Иллюстрируется аргументация на нескольких уровнях: экспериментально-индуктивном (L1), аналогии (L2), наглядно-индуктивном (L3), полуформальном (L4), формальном (L5), суперформальном (L6). Наглядно-интуитивные и полуформальные аргументации рассматриваются как автономные, так и в системе последовательной аргументации, где осуществляется постепенный переход от экспериментального к формальному уроню аргументации.*

Ключевые слова*: предельные теоремы, биномиальное распределение, урони аргументации, неформальное доказательство.*

SUMMARY

V. Kyrman. Approaches to substantiation of boundary theorems for binomial distribution. *Construction of material presentation scheme as for the local Muavr-Laplas theorem and integral Laplas theorem on the intuitive level using informal considerations, available both for schoolchildren of senior classes, who study mathematics on the advanced level, as well as for the students of technical and economic study fields of higher educational establishments. Theoretical grounding suggests having in question the argumentation of mathematical statements while teaching mathematics. The concept of an argumentation is illustrated to have not only formal and logical but also communicative and emotional nature. Argumentation is illustrated on several levels: experimental-inductive level (L1), analogy (L2), visual-intuitive level (L3), semi-formal level (L4), formal level (L5), superformal level (L6). Visual-intuitive and semi-formal argumentations are studied both as autonomous ones and in the system of a consecutive argumentation, where a gradual transition from the experimental to the formal level of the argumentation is realized.*

Key words*: boundary theorems, binomial distribution, levels of argumentation, informal proves.*

УДК 378.016.04:51

О.І. Матяш
М.В. Савченко
Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського

АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ НАВЧАННЯ СТЕРЕОМЕТРІЇ В УМОВАХ ПРОФІЛЬНОГО НАВЧАННЯ

Виокремлено і обґрунтовано окремі проблемні аспекти навчання стереометрії в старшій школі за різними рівнями в умовах профільного навчання: умови навчальних програм з геометрії для 10-11 класів різних рівнів; забезпеченість шкіл необхідними підручниками геометрії; готовність і здатність вчителя математики забезпечити навчання стереометрії на різних рівнях відповідно до профілю навчання. В процесі підготовки майбутнього вчителя математики виділено головні проблеми: проблема навчального часу та проблема