З. Б. ЧУХРАЙ, О. С. ЧАШЕЧНИКОВА

# ВИЩА МАТЕМАТИКА:

## теорія, практика, застосування у професійній діяльності економіста

Рекомендовано до друку Вченою радою Сумського державного
педагогічного університету ім. А.С. Макаренка
(протокол № 4 від 24 листопада 2025 року)

*Навчально-методичний посібник для самостійної
та дистанційної роботи студентів*

***Видання 2-ге, доповнене***

Видавництво
**"Волинські обереги"**

2025

**УДК 51/33**
**Ч 963**

***Рецензенти:***

***Віталій ОМЕЛЬЯНЕНКО*** **–** доктор економічних наук, професор, академік Української технологічної академії, керівник Навчально-наукового центру проєктних технологій, професор кафедри бізнес-економіки та адміністрування Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка;

***Олег ПУРСЬКИЙ*** – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерних наук та інформаційних систем Державного торговельно-економічного університету;

***Ярослав ПЕТРІВСЬКИЙ*** – доктор технічних наук, професор кафедри математики та методики її викладання Рівненського державного гуманітарного університету;

***Петро ТАДЕЄВ*** – доктор педагогічних наук, кандидат фізико-математичних наук, завідувач кафедри вищої математики Національного університету водного господарства та природокористування.

**Чухрай З.Б., Чашечникова О.С.**

Ч 963 **Вища математика: теорія, практика, застосування в професійній діяльності економіста:** Навчально-методичний посібник для самостійної та дистанційної роботи студентів. Вид. 2-ге, доповн. / З.Б. Чухрай, О.С. Чашечникова. – Рівне: Волин. обереги, 2025. – 508 с.

ISBN 978-617-8624-29-3

Запропонований навчально-методичний посібник відповідає силабусу дисципліни «Вища математика» включає елементи лінійної та векторної алгебри, аналітичної геометрії, диференціального числення функції однієї та багатьох змінних, інтегрального числення, диференціальних рівнянь.

Викладений матеріал професійно спрямований (розкривається економічний зміст математичних понять), доступний для дистанційної роботи та самостійного опрацювання студентами з середнім рівнем знань та вмінь. Крім теоретичного матеріалу, який подається у формі «дослідження питання», посібник містить методичні рекомендації та розв'язки багатьох типових задач, дослідницьких завдань та завдань економічного спрямування, а також завдання для самостійного розв'язання.

Посібник розраховано на студентів економічних спеціальностей навчальних закладів усіх рівнів акредитації. Проте він може бути корисним і викладачам, що орієнтуються на розвиток дослідницьких здібностей майбутніх економістів.

**УДК 51/33**


ISBN 978-617-8624-29-3

## ЗМІСТ

*Перелік умовних позначень* .... 9

**ВСТУП** .... 10

**Математика для економістів** .... **10**

1. Математика як засіб дослідження економічних задач та її значення для розвитку інших наук .... 10
2. Математичний інструментарій економіста: масштаб, середні величини, діаграми .... 14
3. Відсотки. Основні задачі на відсотки .... 17
4. Прості відсотки .... 19
5. Складні відсотки .... 22

**Множини та операції над ними** .... **26**

1. Поняття множини. Види множин та їх елементи .... 26
2. Способи задання множин. Підмножина. Круги Ейлера .... 29
3. Операції перетину, об'єднання, різниці, доповнення; закони цих операцій .... 32
4. Декартів добуток множин .... 39

***МОДУЛЬ 1.* Елементи лінійної та векторної алгебри** .... **43**

**Тема 01. Елементи теорії матриць та визначників** .... **43**

1. Визначники II-го та III-го порядку .... 44
2. Властивості визначників .... 47
3. Мінори і алгебраїчні доповнення. Теорема розкладу визначника за елементами будь-якого рядка (стовпця) .... 50
4. Означення матриці. Види матриць .... 51
5. Дії над матрицями .... 56
6. Обернена матриця .... 61
7. Знаходження оберненої матриці з допомогою елементарних перетворень .... 64
8. Ранг матриці. Знаходження рангу матриці з використанням елементарних перетворень .... 65
9. Використання матриць для розв'язування професійних завдань .... 70

**Тема 02. Загальна теорія систем лінійних рівнянь ...................... 76**
1. Застосування визначників до розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (метод Крамера)........................................ 76
2. Використання визначників для розв'язування економічних задач ............................................................................................ 81
3. Розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) матричним способом .................................................................. 82
4. Використання методів Гаусса та Жордана-Гаусса для розв'язування СЛАР (з використанням елементарних перетворень)............................................................................................ 84
5. Алгоритм розв'язання СЛАР методом Гаусса (з використанням розрахункових таблиць). Приклад розв'язання конкретної СЛАР методом Гаусса ................................................ 92

**Тема 03. Вектори та операції над ними .......................................... 97**
1. Прямокутна декартова система координат на площині та у просторі............................................................................................ 97
2. Дії над векторами ............................................................................ 103
3. Скалярний добуток двох векторів та його властивості .......... 107
4. Проекція вектора на вектор. Напрямні косинуси вектора...... 112
5. Лінійні векторні простори та їх геометрична інтерпретація.. 115
6. Лінійна залежність і незалежність векторів. Вимірність і базис векторного простору ..................................................... 119
7. Векторний добуток двох векторів та мішаний добуток трьох векторів, їх властивості .................................................... 122

***Завдання для самостійного розв'язання....................................... 131***

***МОДУЛЬ 2.* Елементи аналітичної геометрії ............................. 146**

**Тема 04. Лінії на площині ............................................................. 146**
1. Найпростіші задачі аналітичної геометрії: відстань між двома точками; поділ відрізка у даному відношенні; паралельне перенесення осей координат ..................................................... 147
2. Поняття рівняння лінії на площині.......................................... 153
3. Рівняння прямої, яка проходить через дану точку, перпендикулярно до даного вектора ......................................... 154

4. Загальне рівняння прямої. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Рівняння прямої у відрізках ................................ 155
5. Канонічне і параметричне рівняння прямої. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки ........................................ 159
6. Кут між двома прямими. Відстань від точки до прямої ......... 162
7. Використання прямої для розв'язування професійно спрямованих задач.................................................................... 165

**Тема 05. Лінії у просторі ............................................................ 170**
1. Рівняння площини, яка проходить через дану точку, перпендикулярну до даного вектора ........................................ 170
2. Загальне рівняння площини ..................................................... 172
3. Рівняння площини у відрізках................................................. 173
4. Рівняння площини, яка проходить через три задані точки..... 175
5. Кут між двома площинами ....................................................... 177
6. Відстань від точки до площини................................................ 179
7. Канонічні і параметричні рівняння прямої у просторі ........... 180
8. Рівняння прямої, що проходить через дві точки у просторі. Кут між двома прямими................................................................ 182
9. Кут між прямою і площиною. Точка перетину прямої і площини ................................................................................... 183

**Тема 06. Криві другого порядку ................................................ 187**
1. Коло ........................................................................................... 188
2. Еліпс ........................................................................................... 190
3. Параметричні рівняння кола і еліпса....................................... 193
4. Гіпербола.................................................................................... 194
5. Парабола..................................................................................... 197
6. Загальне рівняння лінії другого порядку і її зведення до канонічного виду ....................................................................... 199
7. Застосування ліній другого порядку до розв'язування задач економічного змісту ................................................................... 201

***Завдання для самостійного розв'язання....................................... 206***

***МОДУЛЬ 3.*** **Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних ........................................................ 218**

**Тема 07. Границі функції ........................................................ 218**

1. Функція, її властивості та способи задання. Основні елементарні функції ........................................ 220
2. Поняття про виробничі функції в економіці.......................... 227
3. Поняття числової послідовності, приклади числових послідовностей. Границя послідовності.................................... 231
4. Нескінченно малі та нескінченно великі величини, зв’язок між ними ............................................................................. 236
5. Границя функції в точці та на нескінченності. Основні теореми про границі .................................................................. 238
6. Границя відношення двох многочленів.................................. 240
7. Перша та друга визначні (чудові) границі .............................. 243

**Тема 08. Неперервність функції................................................. 248**

1. Поняття неперервності функції в точці та на відрізку............ 248
2. Властивості неперервних функцій........................................... 252
3. Точки розриву функцій та їх класифікація ............................. 253

**Тема 09. Похідна функції............................................................ 257**

1. Задачі, які приводять до поняття похідної.............................. 257
2. Означення похідної функції ..................................................... 260
3. Геометричний, фізичний та економічний зміст похідної. Зв’язок між неперервністю та диференційованістю ................. 263
4. Похідні основних елементарних функцій. Основні правила диференціювання........................................................................ 264
5. Диференціювання складеної, логарифмічної та оберненої функцій ..................................................................................... 266
6. Похідна функції заданої неявно. Похідні вищих порядків..... 270

**Тема 10. Диференціал функції однієї змінної .............................. 275**

1. Означення диференціала та правила його знаходження. Геометричний та економічний зміст диференціала.................... 275
2. Застосування диференціала до наближених обчислень.......... 281
3. Застосування похідної до розв’язування задач економічного змісту ......................................................................................... 282

**Тема 11. Основні теореми диференціального числення ........... 287**
1.Дослідження функції на зростання (спадання)........................ 287
2. Необхідні та достатні умови екстремуму функції. Дослідження функції на екстремум .............................................................. 291
3. Дослідження на найбільше та найменше значення функції на відрізку ................................................................................ 297
4. Дослідження функції однієї змінної на опуклість (вгнутість)........299
5. Повне дослідження функцій за допомогою похідної.............. 302
6. Теореми про середнє значення (теореми Ролля, Лагранжа, Коші)......................................................................................... 310
7. Правило Лопіталя для розкриття невизначеності .................. 314
8. Оптимізація в економічних задачах ........................................ 315

**Тема 12. Диференційовність функції багатьох змінних ............. 320**
1. Основні поняття функції багатьох змінних, границя та неперервність. Способи задання функцій багатьох змінних. Лінії рівня ........................................................................................ 320
2. Частинні похідні першого порядку. Диференціювання функції багатьох змінних першого порядку ........................................... 325
3. Частинні похідні вищих порядків. Диференціал II-го порядку ..................................................................................... 328
4. Повний диференціал. Градієнт................................................. 329
5. Економічний зміст частинних похідних ................................. 331

**Тема 13. Дослідження функції багатьох змінних на екстремум, умовний екстремум ..................................................................... 335**
1. Максимум та мінімум функції багатьох змінних. Умовний екстремум функції двох змінних. Дослідження функції багатьох змінних на екстремум ............................................................... 335
2. Найбільше та найменше значення функції двох змінних....... 339
3. Умовний екстремум функції двох змінних............................. 341
4. Застосування диференціального числення функцій багатьох змінних до наближених обчислень............................................. 346
5. Оптимізація в економічних задачах ........................................ 348

***Завдання для самостійного розв'язання....................................... 355***

***МОДУЛЬ 4.*** **Інтегральне числення. Диференціальні рівняння .... 368**

**Тема 14. Невизначений інтеграл ................................................ 368**
1. Первісна функції. Невизначений інтеграл ............................. 368
2. Таблиця основних невизначених інтегралів. Основні правила (властивості) інтегрування ................................................... 371
3. Основні методи інтегрування: частинами, заміною змінних ......376
4. Інтегрування деяких спеціальних класів функцій (дробово-раціональних, тригонометричних, ірраціональних)................... 381

**Тема 15. Визначений інтеграл...................................................... 392**
1. Задачі, які приводять до поняття визначеного інтеграла ....... 392
2. Означення визначеного інтеграла, його основні властивості. Формула Ньютона-Лейбніца для обчислення визначеного інтеграла ....................................................................................... 396
3. Наближене обчислення визначених інтегралів ....................... 400
4. Основні методи інтегрування.................................................. 403
5. Застосування інтегрального числення до обчислення площ фігур і об’ємів тіл обертання ..................................................... 406
6. Застосування інтегрального числення для розв’язування завдань економічного змісту ...................................................... 411

**Тема 16. Диференціальні рівняння першого порядку............... 415**
1. Математичні моделі ситуацій та процесів, які приводять до диференціальних рівнянь.......................................................... 415
2. Основні поняття та означення. Класифікація диференціальних рівнянь ......................................................................................... 418
3. Найпростіші типи диференціальних рівнянь першого порядку (рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними; однорідні; лінійні) ..................................................................... 421
4. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами ............................................................................ 426

***Завдання для самостійного розв’язання.................................. 429***

**Індивідуальні додаткові завдання........................................... 435**
**15 тестів для підготовки до модульного контролю............... 456**

***Список використаних джерел*** **.................................................. 502**

# ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

**Математика** – Виділення окремих тематичних питань.

– Невелика довідка, присвячена історії розвитку математики, математичних понять і тверджень, біографії вчених тощо.

***Означення*** – Формулювання означень основних понять, теорем, правил тощо, які потрібно запам'ятати.

**Завдання**

**Відповідь** – Практичні завдання та зразки їх розв'язання.

**(15.13)** – Нумерація формул, де перше число – номер теми, під час вивчення якої використовується дана формула.

– Економічний зміст математичних понять.

– Перелік знань та вмінь, які мають набути студенти в результаті вивчення даної теми.

– Питання для самоконтролю.

# Вступ

## МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

***План***

1. *Математика як засіб дослідження економічних задач та її значення для розвитку інших наук.*
2. *Математичний інструментарій економіста: масштаб, середні величини, діаграми.*
3. *Відсотки. Основні задачі на відсотки.*
4. *Прості відсотки.*
5. *Складні відсотки.*

*Основні терміни та поняття:* математика, математичний інструментарій, масштаб, середнє арифметичне, середнє геометричне, середнє квадратичне, відсоток; секторні, стовпцеві, кругові діаграми.

### 1. Математика як засіб дослідження економічних задач та її значення для розвитку інших наук

Математика – одна з найдавніших наук, що зародилася на світанку цивілізації. До її складу входять: факти, накопичені в процесі розвитку; гіпотези (наукові припущення), які ґрунтуються на фактах; теорії, що є результатом узагальнення фактичного матеріалу та дедуктивних доведень; загальнотеоретичне тлумачення математичних законів і теорій, що характеризує загальний підхід до вивчення предмета математики.

## *СТОРІНКА ІСТОРІЇ*

*Розвиток математики пов'язаний з дослідженнями таких видатних учених, як Фалес, Піфагор, Евклід, Архімед, Р.Декарт, П.Ферма, І.Ньютон, Г.Лейбніц, Й.Бернуллі, Л.Ейлер, Е.Галуа, К.Гаусс, О.Коші та інші. Варто зауважити, що великий внесок у розвиток математики зробили й видатні українські вчені.*

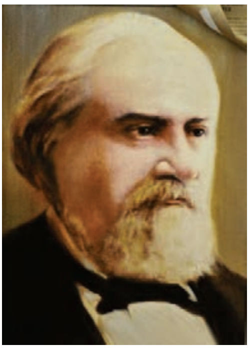
***Феофан Прокопович*** *(1677-1736): до циклу лекцій з філософії включив лекції з математики на рівні відповідних курсів зарубіжних університетів – це був перший курс математики, побудований на наукових основах та прочитаний на теренах України. Йому належать слова: "... я дуже часто помічав сам за собою і за іншими, що жодна наука так не захоплює бажанням пізнання, як математика, – наука вельми цікава і захоплююча".*

***Тимофій Федорович Осиповський*** *(1766-1832): професор, завідувач кафедри математики, а з 1813 по 1820 - ректор Харківського університету. Написав тритомний "Курс математики", який протягом десятиліть був основним підручником для студентів університетів.*

***Михайло Васильович Остроградський*** *(1801-1862): основні роботи присвячені математичному аналізу, математичній фізиці і механіці. Він автор знаменитої формули, відомої в математичному аналізі як формула Остроградського-Гаусса. Широко відомий метод Остроградського інтегрування раціональних функцій, його принцип розкладу за власними функціями, принцип Гамільтона-Остроградського в механіці. Він один із основоположників знаменитої Петербурзької математичної школи. За видатні досягнення в галузі математичних наук М. Остроградського, чи не першого серед українців, обирають членом Академії наук у Нью-Йорку, Туринської академії, Національної академії Деї Лінчеї в Римі, членом-кореспондентом Паризької академії наук, почесним членом багатьох наукових товариств та університетів.*

***Віктор Якович Буняковський*** *(1804-1889): автор багатьох наукових праць, зокрема його монографія "Основи математичної теорії ймовірностей" відіграла надзвичайно важливу роль у розвитку математики в Росії. Знаменита нерівність Коші-Буняковського використовується в різних розділах елементарної та вищої математики. Основні наукові праці вченого відносяться до теорії чисел, теорії ймовірностей та їх застосувань. У галузі теорії чисел розвивав алгебраїчні теорії та аналітичні методи. Сконструював декілька математичних приладів, зокрема запропонував удосконалений варіант рахівниці.*

***Софія Василівна Ковалевська*** *(1850-1891): професор Стокгольмського університету; перша жінка, яку обрано членом-кореспондентом Петербурзької академії наук. Важливі дослідження належать до теорії обертання твердого тіла. Вона відкрила третій класичний випадок розв'язання задачі про обертання твердого тіла навколо нерухомої точки, довела існування аналітичного розв'язку задачі Коші для систем диференціальних рівнянь з частинними похідними, дослідила задачу Лапласа про рівновагу кільця Сатурна. Працювала у галузі теорії потенціалу, математичної фізики, небесної механіки.*



***Михайло Єгорович Ващенко-Захарченко*** *(1825-1912): навчався в Золотоноському повітовому училищі та в Другій Київській гімназії. Математичну освіту здобув частково в Київському університеті св. Володимира, частково Сорбонні та Колеж де Франс у Парижі. У 1862 році видав монографію, присвячену символічному численню. Це була перша в Росії наукова робота з операційного числення й одна із перших у світі. З 1867 р. — професор Київського університету. З початку 1870-х років читав курс проективної геометрії, а з 1878 р. — курс неевклідової геометрії (основи геометрії Лобачевського). У 1880 р. опублікував переклад «Начал» Евкліда з великим вступом, де були розглянуті основні питання геометрії Лобачевського.*

Проникнення математичних методів у будь-яку галузь науки та практичної людської діяльності пояснюється зв'язком математики з об'єктивною реальністю, завдяки цьому числа, геометричні фігури й інші математичні поняття можуть відбивати та описувати найрізноманітніші явища навколишньої дійсності.

Значним науковим досягненням стало впровадження математичних методів у економічну науку і в управління економічними процесами. У наш час наукове управління цими процесами може бути здійснене тільки на основі застосування точних математичних методів у всіх сферах господарювання – від прогнозування розміщення корисних копалин до вивчення попиту на товари широкого вжитку і побутові послуги, від вивчення потреби в робочій силі до планування транспортних артерій тощо. Тому рівень кваліфікації майбутнього економіста значною мірою залежить від рівня його математичної підготовки.

Про значення математики для сучасної економіки можна говорити багато. Найпростіші обчислення проводяться з допомогою калькуляторів чи усних підрахунків, при складних розрахунках використовуються комп'ютери. В основі таких дій лежать або співвідношення між об'єктами, виражені формулами, або логічні висновки. За аналогією з фізичними моделями, які відображають процеси між природними об'єктами, формули, з допомогою яких здійснюються розрахунки, називаються в економічній літературі математичними моделями.

<u>А чи можна використовувати математичну модель:</u>

1) не володіючи мовою математичних понять, не вміючи здійснювати математичні дії над числами, множинами, операторами, функціями;

2) не вміючи працювати з рівняннями, нерівностями і т.д.;

3) не володіючи основними розрахунковими математичними інструментами: логічними поняттями, поняттями комбінаторики, лінійною алгеброю і т.д.;

4) не вміючи ставити проблеми, розв'язувати їх, робити аналіз отриманих результатів?

Відповідь на поставлене запитання ви отримаєте в процесі вивчення дисципліни "Вища математика".

Математика ефективно використовується у різноманітних галузях наук. Зокрема у медицині (лабораторні медичні аналізи складу крові, закономірності розвитку лікарських рослин), у суспільних науках (кількісний та якісний склад політичних партій держави, підсумки виборчих кампаній, соціальний склад населення держави, міста) тощо.

## 2. Математичний інструментарій економіста: масштаб, середні величини, діаграми

Розглянемо приклади простіших задач та математичний інструментарій їх розв’язання.

У завданнях економічного змісту під час планування будівництва виробничих об’єктів – заводів, фабрик й інших об’єктів – на місцевості доводиться складати карти, креслення, які б схематично відображали вигляд об’єкта. Для цього використовується поняття масштабу**,** яке дозволяє ділянки земної поверхні зображати на папері в зменшеному вигляді. Наприклад, відрізок 1 000 м зображають відрізком 1 см. Оскільки 1000 м=100 000 см, то кожний відрізок на карті в 100 000 разів менший, ніж відповідний відрізок на місцевості. Отже,

***Означення.*** ***Масштаб*** *– це відношення довжини відрізка, зображеного на карті чи малюнку, до реальної його довжини на місцевості.*

У статистичних зведеннях розвитку народного господарства використовується поняття середнього арифметичного.

***Означення.*** ***Середнє арифметичне –*** *це частка від ділення суми всіх даних значень величини на кількість цих значень.*

Якщо дано $a_1, a_2, ..., a_n$ – значення певної величини, то середнє арифметичне їх дорівнює:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}. \qquad (1)$$

В економіці сільського господарства поширена задача на визначення середньої врожайності культур.

**Завдання 1.** З 20 га поля зібрали 1610 ц. пшениці, а з решти 30 га – 1950 ц. Знайдіть середню врожайність на всьому полі.

*Розв'язання*

1) 1610+1950 = 3560 ц. – загальний врожай з усього поля;
2) 20+30 = 50 га – загальна площа всього поля;
3) 3560 : 50 = 71,2 (ц.) – середня врожайність з 1га на всьому полі.
**Відповідь:** 71,2 ц.

***Означення. Середнє геометричне n чисел*** $a_1, a_2, ..., a_n$ – *це величина*

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}. \tag{2}$$

***Означення. Середнє квадратичне n чисел*** $a_1, a_2, ..., a_n$ – *це величина*

$$\sqrt{\frac{1}{n}(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)}. \tag{3}$$

Якщо числа $a_1, a_2, ..., a_n$ – додатні, то справедливою є подвійна нерівність, яка зв'язує середнє арифметичне з середнім геометричним та середнім квадратичним:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \le \sqrt{\frac{1}{n}(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)} \tag{4}$$

Засобами ілюстрацій співвідношень між величинами, які описують певні процеси, є стовпцеві та секторні діаграми**.**

Так, за допомогою ***стовпцевої діаграми*** (рис. 1) проілюструємо, як за останні 5 років змінювалася кількість цукру, виробленого одним із цукрових заводів Рівненської області, якщо у

2006 р. вона становила 160 т, у 2007 р. – 130 т, у 2008 р. – 140 т, у 2009 р. – 150 т, у 2010 р. – 100 т.

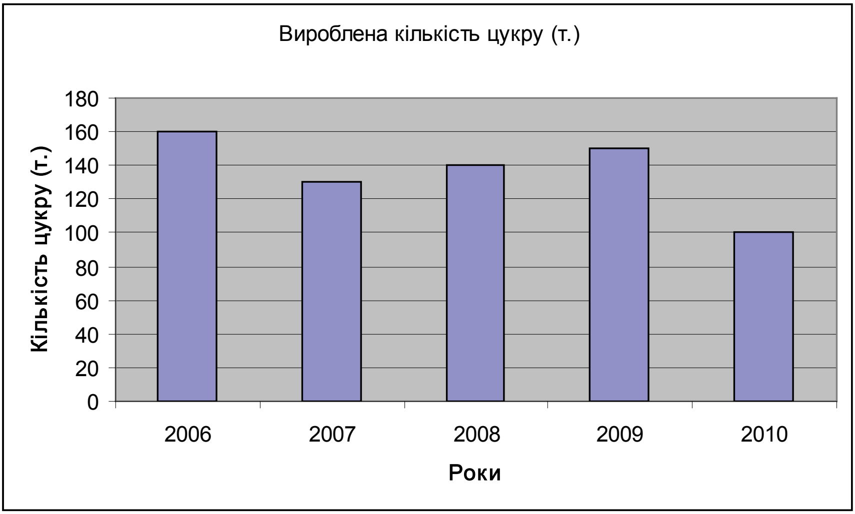



*Рис.1. Кількість цукру, виробленого заводом за п'ять років*

***Кругові діаграми*** можна використовувати для зображення, наприклад, співвідношень між територіями, чисельністю населення тощо, які часто використовують економісти-географи.

Проілюструємо за допомогою кругової діаграми (рис. 2) розподіл площі Світового океану, склад якого поданий у таблиці 1.

Таблиця 1

**Розподіл площі Світового океану**

| **Світовий океан (площею 361 млн. кв. км) складається з:** | |
|---|---|
| *океан* | *площа (у млн. кв. км)* |
| Тихий | 179,7 |
| Атлантичний | 93,4 |
| Індійський | 74,9 |
| Північний Льодовитий | 13 |

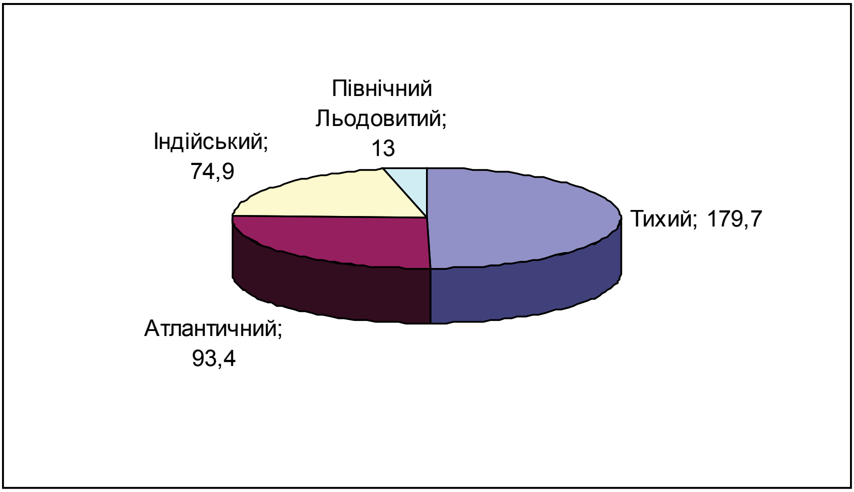



*Рис. 2. Кругова діаграма, що ілюструє складові частини Світового океану*

## 3. Відсотки. Основні задачі на відсотки

Виконання планів на заводах та інших підприємствах характеризується за допомогою поняття відсотка.

***Означення.*** ***Відсоток*** **–** це сота частина числа.

Існує три типи задач на відсотки:
1) знаходження відсотків від числа;
2) знаходження числа за значенням відсотка;
3) знаходження відсоткового відношення значень величин.

Розглянемо задачу та розв'яжемо її двома способами.

***Правило 1.*** *Щоб* ***знайти відсотки від числа,*** *треба записати відсотки у вигляді дробу і помножити число на цей дріб, тобто р відсотків від числа а дорівнює:*

$$\frac{a \cdot p}{100} \quad (5)$$

***Правило 2.*** *Щоб **знайти число за його відсотками,** досить записати відсотки дробом і поділити значення відсотків на цей дріб.*

***Правило 3.*** *Щоб **знайти процентне відношення чисел,** треба арифметичне відношення цих чисел помножити на 100%.*

**Завдання 2.** З молока виходить 10% сиру. Встановіть, скільки сиру вийде з 32,8 кг молока?

*Розв'язання*

*I спосіб.* Оскільки 32,8 кг молока – це 100%, а сир становить 10 % від кількості молока, то на 1 % припаде

$$\frac{32{,}8}{100} = 0{,}328 \text{ кг молока.}$$

10% – це число в 10 разів більше, тобто 0,328·10=3,28 кг.

*II спосіб.* Складемо пропорцію

$$\begin{array}{ll} 32{,}8 & \textit{кг} - 100\% \\ x & \textit{кг} - 10\% \end{array}$$

$$x = \frac{32{,}8 \cdot 10}{100} = 3{,}28\,.$$

**Відповідь:** 3,28 кг.

Потрібно добре зрозуміти, від чого беруться відсотки.

Якщо говорять, що заробітна плата підвищилась на 20%, то розуміють, що вона збільшилась по відношенню до попередньої.

*Наприклад*, якщо ЗП була 350 грн., то 20% становить $\frac{350\cdot 20\%}{100\%}=\frac{350}{5}=70$ грн. Отже, після підвищення ЗП становитиме $350+70=420$ грн.

Збільшенню вдвічі відповідає збільшення на 100%, а зменшенню вдвічі – зменшення на 50%. Ціна товару теоретично може збільшитись на будь-яке число відсотків (130%, 240%, 500%), а зменшитись, наприклад, на 130% не може.

## 4. Прості відсотки

Особливо часто доводиться розв'язувати задачі на відсотки бухгалтерам та працівникам банків. Пригадаємо відомі терміни.

***Капітал*** (або *основна сума, початкова вартість, поточна вартість* – позначається P) – це кількість грошей, вкладених (інвестованих) або позичених (взятих у позику).

***Прибуток*** (позначається I) – ціна, яку треба сплатити за використання грошей.

***Відсоткова ставка*** (позначається r) – прибуток з капіталу, що підраховується у вигляді відсотків від основної суми. Через певний обумовлений час необхідно сплатити капітал плюс прибуток з капіталу.

Метод підрахунку прибутку називається ***методом простих відсотків***.

Прості відсотки обчислюються за формулою:

$$I=P\cdot r\cdot t\,, \tag{6}$$

де $t$ – одиниця часу.

Тоді ***загальна сума*** (або *майбутня вартість* позначається $S$), яку повинен сплатити позичальник, обчислюватиметься за формулою:

$$S = P + I = P + \mathrm{Pr}\,t = P(1 + rt) \qquad (7)$$

**Завдання 3.** Вкладник дав банку під 8% річних 2000 грн. на півроку. Визначте прості відсотки та загальну суму, яку він отримає.

*Розв'язання*

За умовою завдання $P = 2000$; $r = 8\% = 0{,}08$; $t = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = 0{,}5$. Отже,

$$I = P \cdot r \cdot t = 2000 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}5 = 80 \text{ грн.}$$

Тоді $S = P + I = 2000 + 80 = 2080$ грн.

Тобто через 6 місяців вкладник має отримати 2080 грн.

**Відповідь:** $I = 80$ грн., $S = 2080$ грн.

Досить часто доводиться розв'язувати задачі типу: намітивши майбутню вартість, потрібно встановити поточну. Користуючись формулою (7), можна визначити, що:

$$P = \frac{S}{1 + rt} \qquad (8)$$

**Завдання 4.** Вкладник хоче через 10 місяців отримати 5000 грн. Дослідіть, яку суму він повинен інвестувати зараз на умовах 12% річних?

*Розв'язання*

За умовою: $t = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \approx 0{,}83$, $S = 5000$, $r = 12\% = 0{,}12$.

На основі (8) маємо:

$$P = \frac{S}{1 + rt} = \frac{5000}{1 + 0{,}83 \cdot 0{,}12} = \frac{5000}{1 + 0{,}0996} = \frac{5000}{1{,}0996} \approx 4547{,}12 \text{ грн.}$$

**Відповідь:** початкова інвестиція має становити 4547,12 грн.

У деякому випадку боржник, який укладає угоду з позикодавцем, складає документ (***простий вексель*** або ***борговий вексель***) за власним підписом, в якому зобов'язується сплатити певну суму до позначеної в документі дати. Іноді угода про надання позики укладається з допомогою ***дисконтного векселя***. Тоді величина, яку треба сплатити за користування грошима, називається ***простий дисконт*** (позначається $D$). Він підраховується як відсоток від загальної суми $S$. Ці відсотки називаються ***ставкою дисконту*** (позначається $d$). Тоді,

$$D = Sdt \tag{9}$$

Виручена сума (***виручка*** позначається $B$) визначається з рівняння:

$$B = S - D = S - Sdt = S(1 - dt) \tag{10}$$

**Завдання 5.** Підприємець видав інвестору шестимісячний дисконтний вексель на суму 35000 грн. Ставка дисконту 7% річних. Дослідіть, яку суму заробить інвестор?

*Розв'язання*

$$S = 35000,\ t = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = 0{,}5,\ d = 7\% = 0{,}07$$

$$D = Sdt = 35000 \cdot 0{,}07 \cdot 0{,}5 = 1225 \text{ грн.}$$

**Відповідь:** інвестор заробить 1225 грн.

Якщо виручка відома, то, користуючись формулою (10), можна для векселя обчислити завершальну вартість $S$:

$$S = \frac{B}{1 - dt} \tag{11}$$

**Завдання 6.** Дослідіть, якою буде завершальна вартість дисконтного векселя, якщо банк пропонує ставку дисконту 12%, а отримати необхідно 6000 грн. за 2 місяці.

*Розв'язання*

Перейдемо до умовних позначень: $B = 6000; d = 0{,}12;$ $t = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. Тоді за формулою (11) матимемо:

$$S = \frac{6000}{1 - 0{,}12 \cdot \frac{1}{6}} = 6122{,}4489 \approx 6122 \text{ грн.}$$

Отже, користування 6000 грн. 2 місяці обійдеться в $D = S - B = 6122 - 6000 = 122$ грн.

**Відповідь:** завершальна вартість дисконтного векселя становитиме 6122 грн.

## 5. Складні відсотки

Вказані вище методи розрахунку ціни за використання грошей називаються *методами простих відсотків*. Однак вони використовуються дуже рідко і на дуже короткий термін.

Розглянемо метод підрахування прибутку з капіталу, коли ставка відсотка береться не від початкової вартості, а від величини, що дорівнює початковій вартості плюс відсотки. Такий метод називається ***компаундингом***, а кожен крок цього процесу – ***компаундом*** (нарахування). Результат нарахування називається ***складними відсотками***.

Складні відсотки нараховуються періодично. Якщо вони підраховуються щомісячно (12 разів на рік), то це називається ***щомісячним компаундом***, а кожен місяць – ***конверсійним періодом***. Якщо нарахування йде кожні 3 місяці – ***квартальний компаунд*** і т.д.

**Завдання 7.** Дослідіть завершальну вартість 1000 грн., яку вкладник хоче отримати через 18 місяців із ставкою 6% з піврічним компаундом.

*Розв'язання*

За умовою $P = 1000$, $r = 6\% = 0{,}06$. Оскільки прибуток потрібно рахувати кожні півроку (піврічний компаунд), то 18 місяців становить 3 компаунди. Тоді $t = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$.

<u>І компаунд</u>. $I = \Pr t = 1000 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}5 = 30$ грн.

$$S = P + I = 1000 + 30 = 1030 \text{ грн.}$$

<u>ІІ компаунд</u>. $I = \Pr t = 1030 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}5 = 30{,}9$ грн. На даному етапі за початкову суму береться величина, що дорівнює початковій сумі з умови плюс прибуток, одержаний за перший компаунд. Тоді $S = P + I = 1030 + 30{,}9 = 1060{,}9$ грн.

III компаунд. Тепер початкова сума становить 1060,9 грн. Отже,

$$I = \Pr t = 1060{,}9 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}5 = 31{,}827$$

$$S = P + I = 1060{,}9 + 31{,}827 = 1092{,}727 \approx 1092{,}7 \text{ грн.}$$

**Відповідь:** 1092,7 грн.

Останній результат часто називають ***сумою компаунда***. У даному прикладі при кожному наступному компаунді нова початкова сума множиться на одне і те саме число $rt = 0{,}06 \cdot 0{,}5 = 0{,}03 = 3\%$, яке називається ***ставкою відсотка за конверсійний період*** (позначається $i$). Вважається, що

$$i = \frac{r}{m}, \tag{12}$$

де $r$ – щорічна або визначена для даного періоду ставка відсотка (номінальна ставка), $m$ – число конверсійних періодів за рік.

***Кількість конверсійних періодів*** $n$ можна підрахувати, помноживши кількість конверсійних періодів за рік $m$ на кількість років:

$$n = mt \tag{13}$$

**Завдання 8.** Певну суму грошей інвестовано на 3 роки із ставкою 9% при щомісячному компаунді. Визначте ставку відсотка за конверсійний період та кількість конверсійних періодів.

*Розв'язання*

За умовою: $t = 3, r = 9, m = 12$. Отже,

$$i = \frac{r}{m} = \frac{9}{12} = 0{,}75\%$$

$$n = 12 \cdot 3 = 36.$$

**Відповідь:** 0,75%; 36 періодів.

Виведено загальну формулу для суми компаунда:

$$S = P(1+i)^n, \tag{14}$$

де $n$ – кількість конверсійних періодів.

**Завдання 9.** Знайдіть суму компаунда для 30000 грн., вкладених на 3 роки під 12% річних
за квартальним компаундом.

*Розв'язання*

За умовою: $P = 30000, t = 3, r = 12\% = 0{,}12, m = 4$ (бо в році 4 квартали). Тоді, щоб скористатись (14), знайдемо

$$i = \frac{r}{m} = \frac{0{,}12}{4} = 0{,}03 \qquad n = mt = 4 \cdot 3 = 12.$$

Отже,
$S = P(1+i)^n = 30000 \cdot (1+0{,}03)^{12} \approx 30000 \cdot 1{,}4258 = 42778$ грн.

**Відповідь:** 42778 грн.

**У результаті вивчення теми необхідно:**

| *знати* | *вміти* |
|---|---|
| - означення масштабу, середнього арифметичного, середнього квадратичного та середнього геометричного;<br>- види діаграм;<br>- означення капіталу, прибутку, ставки відсотка, компаунда, конверсійного періоду, простого та дисконтного векселів, ставки дисконтного векселя;<br>- суть методу простих відсотків;<br>- суть методу складних відсотків | - розв'язувати прикладні задачі економічного характеру за допомогою масштабування;<br>- виконувати обчислення методом простих відсотків;<br>- розв'язувати завдання професійного спрямування з використанням математичного апарату;<br>- виконувати дослідницьку роботу, аналізувати отримані результати, робити висновки щодо їх реальності |

## Питання для самоконтролю

1. Що називається масштабом?
2. Сформулюйте означення середнього арифметичного та подайте його у вигляді формули.
3. Запишіть формули, які відповідають поняттям середнього геометричного та середнього квадратичного.
4. Яке співвідношення зв’язує усі відомі вам середні?
5. Що називається відсотком?
6. Які типи задач на відсотки ви знаєте?
7. Вкажіть, що необхідно зробити, щоб знайти число за його відсотком?
8. Як знайти відсоток від числа?
9. Що необхідно зробити для знаходження відсоткового відношення двох чисел?
10. Які види діаграм ви знаєте? Покажіть на прикладах.
11. Що таке капітал, прибуток, ставка відсотка?
12. Дайте означення загальної суми та поясніть, як вона обчислюється методом простих відсотків.
13. Які переваги чи недоліки методу компаундів?
14. Що таке компаунд, конверсійний період, ставка відсотка за конверсійний період?
15. Як обчислюється сума компаунда?
16. Як встановлюється поточна вартість, якщо відома майбутня?
17. Що називається простим векселем, дисконтним векселем, ставкою дисконтного векселя?
18. Як обчислюється виручка?

# МНОЖИНИ ТА ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ

***План***

1. *Поняття множини. Види множин та їх елементи.*
2. *Способи задання множин. Підмножина. Круги Ейлера.*
3. *Операції перетину, об'єднання, різниці, доповнення; закони цих операцій.*
4. *Декартів добуток множин.*

*Основні терміни та поняття*: множина (скінченна, нескінченна, одноелементна, порожня, універсальна), рівні множини; об'єднання, переріз, доповнення множин; декартовий добуток множин.

## 1. Поняття множини. Види множин та їх елементи

Поняття множини первинне (основне), тому воно не означується. Воно береться безпосередньо з досвіду і не зводиться до найпростіших понять. Замість слів сукупність, ансамбль, колекція, система, збірка, букет можна вживати одне слово – множина, тобто ми об'єднуємо поняття за певною ознакою. Можна говорити про множину геометричних фігур, множину чисел, множину тригонометричних функцій і т.д.

***Означення***. *Об'єкти, з яких складається множина, називають **елементами множини**.*

***Означення***. *Якщо множина має скінченну кількість елементів, то вона називається **скінченною**.*

З наведених вище прикладів видно, що елементами множини можуть бути різноманітні предмети: числа, функції, точки, букви, люди, атоми, будинки тощо.

*Наприклад*, множина працівників одного підприємства; множина цілих додатних чисел, менших за 100. Також скінченною буде множина "зведений бюджет", елементами якої є державний, місцеві бюджети, бюджет Автономної Республіки Крим, бюджет міста Київ та міста Севастополь.

***Означення.*** *Якщо множина складається з нескінченної кількості елементів, то вона називається* ***нескінченною****.*

<u>*Наприклад,*</u> множина раціональних чисел, дійсних чисел; множина точок даного кола; множина трикутників даного периметра і т.д.

Позначають множини великими латинськими літерами, а елементи множин – маленькими.

Якщо елемент $a$ належить до множини $B$, то це записують так: $a \in B$. Значок $\in$ називається ***знаком належності***.

Якщо елемент $b$ не належить множині $C$, то це записують $b \notin C$. Замість слів "елемент $a$ належить до множини $B$" інколи кажуть "$a$ є елементом множини $B$".

***Означення.*** ***Одноелементною*** *називається множина, що складається з одного елемента.*

<u>*Прикладом*</u> одноелементної множини є множина простих дільників числа 8: $\{2\}$.

Слід розрізняти одноелементну множину $\{a\}$ і її елемент $a$. Множина утворюється в результаті об'єднання елементів і має характерні властивості. Одноелементна множина $\{a\}$ не може бути додатною або від'ємною, парною або непарною, цілою або дробовою, а елемент $a$ з цієї множини може мати кожну із цих характеристик. З іншого боку, про число $a$ не можна сказати, що воно є одноелементним (ця якість належить лише множині). Саме тому ми записуємо $a \in \{a\}$. Отже, $\{0\}$ є одноелементною множиною, елементом якої є число нуль.

***Означення****. Множина, яка не містить жодного елемента, називається* ***порожньою множиною*** *і позначається ø.*

*Прикладами* порожніх множин є: множина прямокутних трапецій, вписаних у коло; множина *n*-кутників, у яких усі кути прямі, а діагоналі нерівні; множина прямокутних трикутників, у яких квадрат гіпотенузи не дорівнює сумі квадратів катетів.

***Означення.*** *Дві множини називаються* ***рівними****, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів.*

Про рівні множини також говорять, що це однакові множини, або що $A$ і $B$ – це одна і та сама множина. Записують це так: $A = B$. Дві множини $A$ і $B$ вважаються нерівними, якщо множина $A$ містить хоч один елемент, який не належить множині $B$, і навпаки. Це записується так: $A \neq B$.

Наведемо *приклади.*

1. Якщо $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{b, a, d, c, e\}$, то $A = B$.
2. Якщо $A = \{6,7,8,9,10,11,12,13,14\}$, $B = \{x | x \in N \quad i \quad 6 \leq x \leq 14\}$, то $A = B$.
3. Якщо $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, b, c, e\}$, то $A \neq B$, бо $d \in A$, але $d \notin B$.

Під час вивчення множини певний інтерес становлять множини, які є спорідненими між собою. Так, це певні числові множини, множини геометричних фігур на площині чи в просторі, множини людей у межах села, району чи області і т.д.

У зв’язку з цим природною є домовленість про те, що розглядувані в кожному конкретному випадку множини є підмножинами деякої більш об’ємної множини. Цю множину називають *універсальною* і позначають *u*. В кожному конкретному випадку визначається універсальна множина, що складається з елементів якого-небудь певного типу (числа, геометричні фігури, назви творів, імена людей і т.д.), тобто універсальна множина є "постачальником" елементів для тієї сукупності множин, які в даний момент розглядаються.

## 2. Підмножина, способи задання множин. Круги Ейлера

Існує декілька ***способів задання множин***.

1. Довільну скінченну множину можна задати *перелічуванням її елементів*. Наприклад, множину студентів першого курсу певної спеціальності можемо задати списком у груповому журналі. Елементи множини під час перелічування беруться у фігурні дужки:
   1) $\{a, в, c\}; \{1;2\}$;
   2) множина документів, які потрібно здати, може бути заданою їх переліком:
   *{господарська операція, синтетичні рахунки, звіт про фінансовий результат, баланс}*.

   Якщо множина $A$ складається з елементів $a$ і $в$, то це записується так: $A = \{a; в\}$. Фігурні дужки показують, що елементи об'єднані в одне ціле – множину $A$. Якщо множина має велику кількість елементів, то даний спосіб є не дуже зручним.

2. *Символічне задання* множини (спосіб опису множин *за допомогою характеристичної властивості*). Ця властивість повинна бути такою, щоб було зрозуміло: належить даний об'єкт до розглядуваної множини чи ні. Наприклад, число 5 належить до множини додатних чисел і не належить до множини від'ємних чисел.

   Але характеристична властивість не завжди задає множину однозначно (не можна назвати множину цікавих книжок, бо поняття "цікава книжка" належить до суб'єктивних понять; не можна задати множину днів дитинства, бо поняття "дитинство" точно не визначене). Якщо множина нескінченна, то її можна задати наведенням певної частини, з якої можна зрозуміти, що являє собою дана нескінченна множина. Наприклад, $\{2;4;6;8;...\}$ або $\{2;4;6;...2n;...\}$ – множина додатних парних чисел. Крім того, якщо $N$ – множина натуральних чисел, а треба задати множину парних чисел, то це можна записати так:

$E \quad \{x \in N | x = 2k\}$, тобто $E$ – множина таких чисел $x$, які належать до множини натуральних чисел і кратні 2.

Розглянемо ще декілька прикладів множин, де $N$ – множина натуральних чисел: $E \quad \{x \in N | x - \textit{просте}\}$ – множина простих чисел; $E \quad \{x \in N | x = 3k\}$ або $E \quad \{x \in N | x - \textit{кратне} \quad 3\}$ – множина непарних чисел.

З елементів будь-якої непорожньої множини можна утворити нові множини, які є частинами початкової множини або, як говорять, її **підмножинами**. Так, розглядаючи множину студентів коледжу, можна виділити такі її частини: множина окремих груп, множина відмінників, множина учасників самодіяльності тощо.

***Означення.*** *Множина В називається* ***підмножиною*** *множини А, якщо кожний елемент множини В є елементом множини А, тобто* $a \in B \Rightarrow a \in A$ *для кожного* $a \in B$.

Тут знак "$\Rightarrow$" читається "слідує". Скорочено означення можна записати з допомогою знака включення ($\subseteq$). Тобто $B \subseteq A$. Це позначення означає, що $B \subset A$ (читається: *B* включається в *A*) або $A = B$.

З економічної точки зору твердження $B \subset A$ можна розшифрувати так: дочірнє підприємство (множина $B$) є підмножиною основного підприємства (множина $A$).

**Завдання 10.** Запишіть усі підмножини множини $M = \{a, b, c\}$:

*Розв'язання*

Зазначимо, що підмножинами будуть: порожня множина (ø), одноелементні $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, двохелементні $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ множини та сама множина $M$.

**Відповідь**: ø, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$ .

Кількість підмножин даної множини обчислюється за формулою: $2^k$, де $k-$кількість елементів множини. У попередньому прикладі множина містить 3 елементи. Отже, можна скласти $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ підмножин, що ми і зробили.

***Означення.*** *Підмножина В множини А називається* ***власною підмножиною*** *або* ***правильною частиною множини А****, якщо В є непорожня множина і в А знайдеться хоча б один елемент, якого немає в В.*

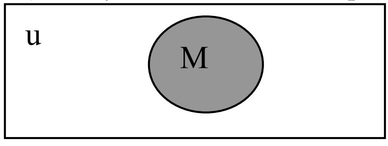
Так, власними підмножинами множини $M = \{a, b, c\}$ є всі її підмножини, крім порожньої множини та самої множини *М*, які називаються ***невласними підмножинами***.

Слід чітко розрізняти смисл знаків $\in$ (належить) і $\subset$ (включається). Так, для множини $M = \{a, b, c\}$ маємо $\{a\} \subset M$, але $\{a\} \notin M$, бо множина *М* не містить елемента $\{a\}$ (але вона містить елемент $a$).

Повертаючись до поняття універсальної множини, зазначимо, що, вживаючи термін "множина *М* ", слід пам'ятати, що *М* є підмножиною певної універсальної множини. Це поняття має відносний характер і є стабільним тільки для певної ситуації в певний час, тобто одна й та сама множина *М* в одних випадках може бути підмножиною однієї універсальної множини $u_1$, а в інших – іншої $u_2$.

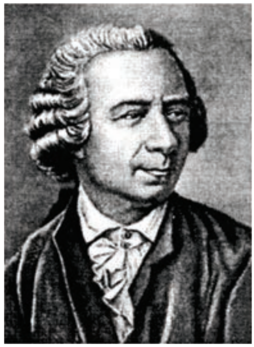
*Наприклад*, для множини парних додатних чисел універсальною множиною може бути: множина N, множини Z, Q тощо; для певного товариства з обмеженою відповідальністю (ТзОВ) універсальною множиною буде сукупність таких товариств у регіоні.

Для унаочнення деяких міркувань про множини користуються геометричними схемами, які використовував у своїх дослідженнях видатний математик Л.Ейлер (1707-1783), тому їх називають *діаграмами (кругами) Ейлера*. Універсальну множину в таких схемах позначають прямокутником. Всередині нього кругами зображують підмножини:



## *СТОРІНКА ІСТОРІЇ*

***Леонард Ейлер (1707-1783)*** *– найпродуктивніший математик в історії. Народився у швейцарському місті Базель. Початкову освіту отримав удома та вступив до гімназії. Але ґрунтовних знань там не отримав і батьки змушені були найняти приватного вчителя. У 13 років став студентом факультету мистецтв Базельського університету, де викладачем був кращий на той час математик світу Йоганн Бернуллі. У 1726 році двадцятирічний Ейлер отримав запрошення Петербурзької Академії наук і назавжди покинув Швейцарію.*



*За час своєї наукової діяльності вчений написав більше 880 праць, у тому числі ряд багатотомних монографій. Із них за життя було опубліковано близько 560 праць. Починаючи з 1909 року, у Швейцарії видається Повне зібрання праць Ейлера, розраховане на 72 томи. Крім цього, лише частково опубліковане листування, яке охоплює більше 3 тис. листів. 31 рік свого життя він віддав Петербурзькій Академії наук, у виданнях якої за життя опублікував близько 400 праць, а ще протягом 80 років Академія продовжувала видавати неопубліковані за його життя праці. Учений був обраний академіком (і почесним академіком) у восьми країнах світу. Він залишив видатні праці в різних галузях математики, механіки, фізики, астрономії, у прикладних науках. Але в першу чергу, без сумніву, був математиком. Ейлер відомий також як інженер-конструктор: він не лише створив теорію реактивних турбін, але й запропонував свій проект нової турбіни.*

## 3. Операції об'єднання, перерізу, доповнення та різниці; закони цих операцій

З даних множин можна утворити нові множини за допомогою операцій над ними.

***Означення.*** ***Об'єднанням (або сумою)*** *двох множин $A$ і $B$ називають таку множину, що складається з усіх тих і лише тих елементів, які належать принаймні до однієї з множин $A$ і $B$, тобто належать до $A$ або до $B$.*

З допомогою символів це можна записати так: $A \cup B$. Операція, за допомогою якої з множин $A$ і $B$ утворюється множина $A \cup B$, називається ***додаванням*** або ***об'єднанням*** множин.

*Наприклад.*

1) $A=\{1,2,3,4\}$; $B=\{3,4,5\}$, тоді $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$;

2) $A=\{a,b\}$; $B=\{1,k\}$, тоді $A\bigcup B=\{a,b,1,k\}$;

3) $A=\{1,2\}$; $B=\{1,2\}$, тоді $A\bigcup B=\{1,2\}$;

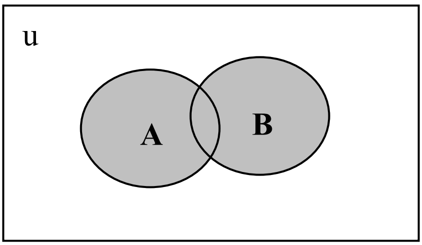
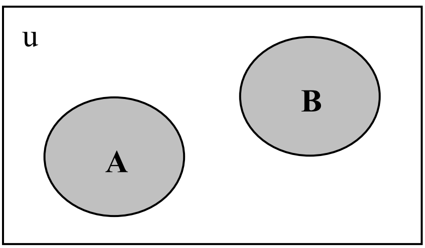
4) $A=\{a\}$; $B=\varnothing$, тоді $A\bigcup B=\{\{a\},\ \varnothing\}$

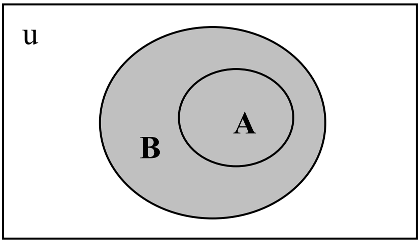
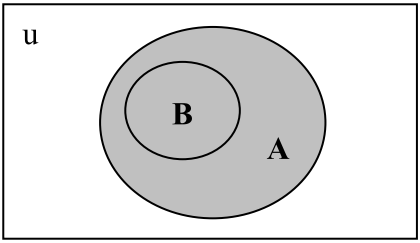
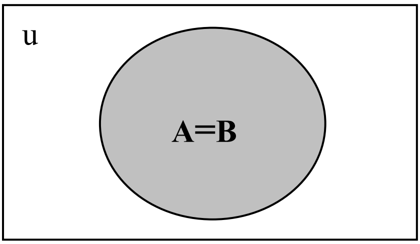
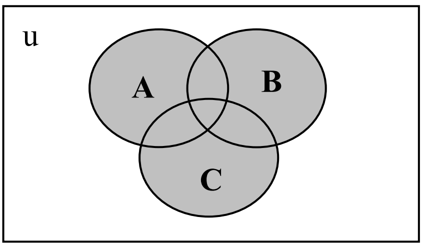
5) якщо $A$ – множина заводів, що виготовляють металеві деталі для літаків певної моделі, $B$ – множина заводів, що виготовляють інші деталі, то елементами множини $A\cup B$ є всі деталі, необхідні для побудови літаків.

Додавання двох множин можна геометрично проілюструвати за допомогою кругів Ейлера (таблиця 2).

Таблиця 2

**Геометрична ілюстрація об’єднання множин**

| Випадки розміщення множин | Словесне тлумачення |
|---|---|
| <br>Рис.3 | Якщо множини $A$ і $B$ мають спільні елементи, то їх об’єднанням (сумою) $A\bigcup B$ буде зафарбована частина. |
| <br>Рис.4 | Якщо множини $A$ і $B$ не мають спільних елементів, то їх об’єднанням (сумою) буде множина елементів і множини $A$, і множини $B$. |

| | |
|---|---|
| <br>Рис.5 | Якщо множина $A$ є підмножиною множини $B$, тобто, якщо $A \subset B$, то об'єднанням даних двох множин буде множина $B$. Отже, $A \bigcup B = B$. |
| <br>Рис.6 | Якщо множина $B$ є підмножиною множини $A$, тобто, якщо $B \subset A$, то об'єднанням даних двох множин буде множина $A$. Отже, $A \bigcup B = A$. |
| <br>Рис.7 | Для об'єднання множин $A$ і $B$ у випадку їх рівності ( $A = B$ ) справедливими є записи: $$A \bigcup B = A \bigcup A = A$$ або $$A \bigcup B = B \bigcup B = B.$$ |
| <br>Рис.8 | Суму (об'єднання) множин можна поширити на випадок кількох множин.<br>Наведено випадок трьох множин $A, B, C$. Суму їх позначають $A \bigcup B \bigcup C$. |

***Означення. Перерізом (або добутком)*** *двох множин $A$ і $B$ називається множина, що складається з тих елементів, які належать до кожної з множин $A$ і $B$.*

Записується так: $A \bigcap B$. Операцію, за допомогою якої з множин $A$ і $B$ утворюють множину $A \bigcap B$, називають ***множенням*** множин.

*Наприклад.*

1) $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{5,4,7,2\}$, тоді $A \bigcap B = \{2,4\}$;

2) $A = \{a,b,c,k\}$, $B = \{a,b\}$, тоді $A \bigcap B = \{a,b\} = B$;

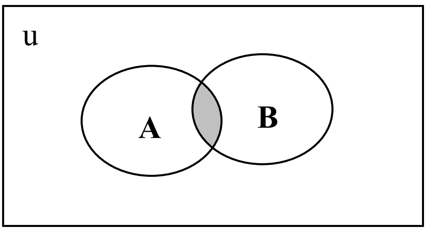
3) $A$ – множина цілих чисел, $B$ – множина додатних чисел, тоді $A \bigcap B$ – множина натуральних чисел.

4) $A = \{a.b\}$, $B = \{k,p\}$, тоді $A \bigcap B = \varnothing$.

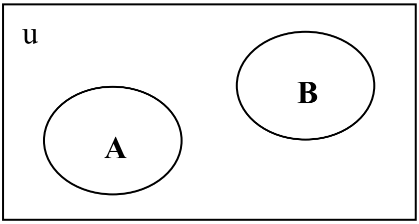
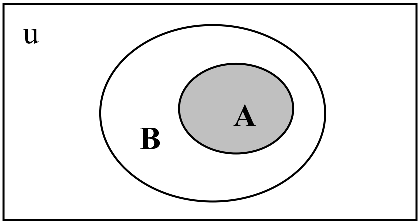
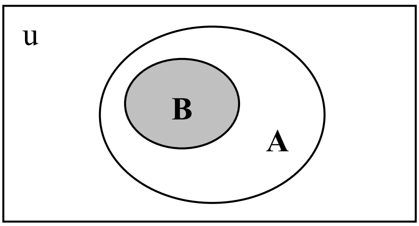
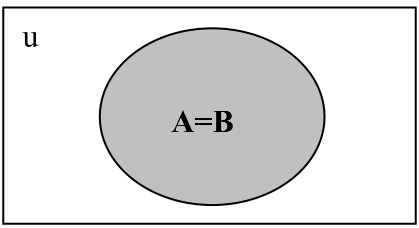
5) $A$ – множина колективу одного, а $B$ – іншого підприємства корпорації, тоді $A \bigcap B$ – множина членів правління даної корпорації.

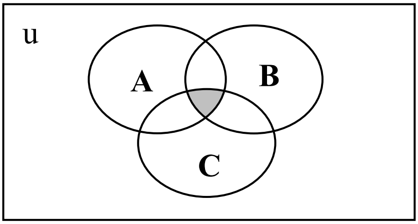
Таблиця 3

**Геометрична ілюстрація перерізу множин за допомогою кругів Ейлера**

| Випадки розміщення множин | Словесне тлумачення |
|---|---|
|   Рис.9 | Якщо множини $A$ і $B$ мають спільні елементи, то їх перерізом (добутком) $A \bigcap B$ буде зафарбована частина: спільні елементи для двох множин. |

*Продовження таблиці 3*

<table>
<tr><td><br><br>Рис.10</td><td>Якщо множини $A$ і $B$ не мають спільних елементів, то їх перерізом буде порожня множина: $A \bigcap B = ø$.</td></tr>
<tr><td><br><br>Рис.11</td><td>У випадку, коли множина $A$ є підмножиною множини $B$ ( $A \subset B$ ), то їх перерізом буде множина спільних елементів, тобто сама множина $A$. Це можна записати так: $A \bigcap B = A$ .</td></tr>
<tr><td><br><br>Рис.12</td><td>У випадку, коли множина $B$ є підмножиною множини $A$ (тобто, коли $B \subset A$), перерізом буде множина спільних елементів, тобто сама множина $B$. Це можна записати так: $A \bigcap B = B$ .</td></tr>
<tr><td><br><br>Рис.13</td><td>Для перерізу множин $A$ і $B$ у випадку їх рівності ( $A = B$ ) справедливим є запис: $A \bigcap B = B \cap A = A = B$ .</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| <br>Рис.14 | Поняття перерізу можна поширити на випадок кількох множин. На рисунку 14 зображено добуток трьох множин $A, B, C$, який можна записати $A \bigcap B \bigcap C$. |

У математиці часто розглядають множини, елементами яких є дійсні числа. Ці множини є підмножинами множини дійсних чисел. Візьмемо одну з таких множин $A$. Тоді можна ввести нове поняття – **доповнення даної множини**, яке позначатимемо $\overline{A}$.

***Означення.*** ***Доповненням*** *множини $A$ є всі ті і лише ті дійсні числа, які не увійшли до даної множини.*

*Наприклад:*
1) для множини раціональних чисел доповненням є множина ірраціональних чисел;
2) для множини невід'ємних чисел доповненням є множина від'ємних чисел.

***Означення***. *Множина всіх елементів, до якої ми доповнюємо дану множину, називається* ***універсальною*** і, як ми вже говорили раніше, домовилися її позначати $u$.

Доповнення $\overline{A}$ множини $A$ беруть відносно універсальної множини $u$. Отже, не вказавши універсальну множину, не можна визначити доповнення $\overline{A}$ до множини $A$. З наведених міркувань випливає, що $A \bigcup \overline{A} = u$. Доповнення $\overline{A}$ множини $A$ до універсальної множини можна зображати за допомогою кругів Ейлера (рис. 15).

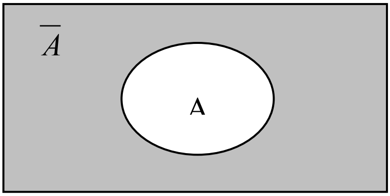



Рис.15

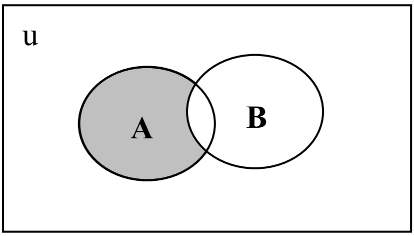
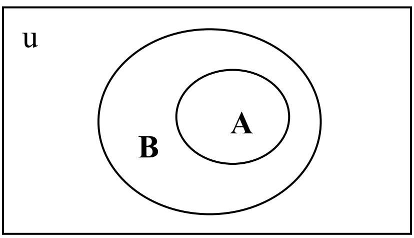
***Означення. Різницею** двох множин $A$ і $B$ називається множина $A \setminus B$, в яку входять ті і лише ті елементи множини $A$, які не належать до множини $B$.*

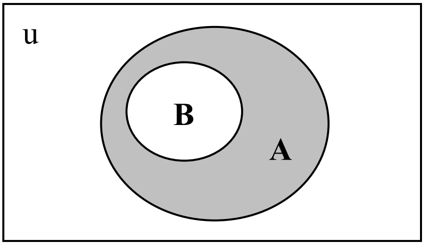
Операцію, за допомогою якої знаходиться різниця, називають ***відніманням*** множин.

Скориставшись кругами Ейлера, отримаємо такі ілюстрації різниці двох множин (таблиця 4).

Таблиця 4

**Геометрична ілюстрація різниці множин за допомогою кругів Ейлера**

| Випадки розміщення множин | Словесне тлумачення |
|---|---|
|  <br>Рис.16 | Якщо множини $A$ і $B$ мають спільні елементи, то їх різницею $A \setminus B$ є частина елементів множини *A* без елементів множини *B*, яка зображена на рисунку 16. У випадку $B \setminus A$ заштрихувати потрібно елементи множини *B* без елементів множини *A*. |
|  <br>Рис.17 | Коли множина А є підмножиною множини В, то при знаходженні різниці $A \setminus B$ результатом буде порожня множина, адже немає таких елементів множини *A*, які б можна було розглядати без елементів множини *B*. Тому для зображеного на рисунку 17 випадку справедливим є запис: $A \setminus B = \varnothing$. |

| | |
|---|---|
|   Рис.18 | Коли множина $B$ є підмножиною множини $A$, то знаходження різниці $A \setminus B$ цих множин зводиться до відкидання від множини $A$ спільної частини множин $A$ та $B$.<br>Різниця ж $B \setminus A = \varnothing$. |

*Наприклад.*
1) Якщо $A$ – множина натуральних чисел, а $B$ – множина парних чисел, то $A \setminus B$ – множина непарних чисел.
2) Якщо $A$ – множина всіх плоских геометричних фігур, а $B$ – множина трикутників, то $A \setminus B$ – множина плоских фігур, що не є трикутниками.
3) Якщо $A$ – множина всіх працівників (основних і сумісників) одного підприємства, а $B$ – іншого, причому серед сумісників є такі, що працюють одночасно у двох згаданих підприємствах, то $A \setminus B$ – множина основних працівників множини А. Відповідно $B \setminus A$ – множина основних працівників підприємства $B$.

**4. Декартів добуток множин**

Упорядковану пару $(x; y)$ будемо записувати так: $\overline{xy}$. Наприклад: пара (2;1) запишеться як $\overline{21}$, а пара (5;5) – $\overline{55}$. Впорядковані пари можна складати не лише з чисел. Якщо розглядаються елементи якихось множин, то з них також складаються пари. Нехай задана множина $X$, елементи $x$ та $y$ належать цій множині. Назвемо пару $(x; y)$ впорядкованою, а $x$ і $y$ – компонентами цієї пари або її координатами.

***Означення.*** Пари $(x_1; y_1)$ та $(x_2; y_2)$ співпадають (є *рівними*) тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2, y_1 = y_2$. У протилежному випадку дані пари є різними.

Із елементів множини $X = \{a, b, c\}$ можна скласти 9 різних пар: $(a,a);(a,b);(a,c);(b,b);(b,a);(b,c);(c,c);(c,a);(c,b)$.

Більш загальне поняття впорядкованої пари будемо мати, якщо брати її компоненти з різних множин.

**Завдання 11.** Дослідіть, скільки пар можна утворити з елементів множин $X = \{a, b, c\}$ та $Y = \{4,5\}$ так, щоб перша компонента належала множині $X$, а друга – множині $Y$.

*Розв'язання*

Наведеним вимогам відповідають такі пари елементів: $(a;4);(a;5);(b;4);(b;5);(c;4);(c;5)$.

**Відповідь:** 6 пар.

***Означення***. *Декартовим (прямим) добутком* множин $X$ та $Y$ називається множина $X \times Y$, елементами якої є пари $(x; y)$ такі, що $x \in X, y \in Y$, тобто

$$X \times Y = \{(x; y) | x \in X, y \in Y\}.$$

Якщо множини $X$ та $Y$ співпадають, тобто, якщо $x = y$, то множина $X \times Y = X \times X = X^2$ (квадрат декартового добутку) складається з усіх пар $(x; y)$ таких, що $x \in X, y \in Y$ .

*Наприклад,* необхідно обчислити квадрат декартового добутку множини $X = \{m, n, p\}$. Користуючись попереднім твердженням, можемо записати, що

$X^2 = X \times X = \{(m,m);(m,n);(m,p);(n,n);(n;m);(n,p);(p,p);(p,m);(p,n)\}$.

**Завдання 12.** Запишіть усі двозначні числа, цифри десятків яких належать множині

$A = \{3;6;1\}$, а цифри одиниць – $B = \{0;7\}$.

*Розв'язання*

Скористаємось означенням декартового добутку $A \times B$:

$$A \times B = \{(3;0);(3;7);(6;0);(6;7);(1;0);(1;7)\}$$

**Відповідь:** 30, 37, 60, 67, 10, 17.

**У результаті вивчення теми студенти повинні:**

| ***знати*** | ***вміти*** |
|---|---|
| - поняття множини, її різновиди;<br>- означення підмножини та її видів;<br>- операції над множинами;<br>- поняття декартового добутку множин | - задавати множини різними способами;<br>- визначати підмножини даної множини;<br>- виконувати операції над множинами та ілюструвати їх за допомогою кругів Ейлера;<br>- розв'язувати задачі за допомогою декартового добутку множин |

## Питання для самоконтролю

1. Якими способами можна задати множину?
2. Як позначаються множини та їх елементи?
3. Сформулюйте означення порожньої, одноелементної, скінченної і нескінченної, універсальної та рівних множин.
4. Що називається підмножиною даної множини?
5. Що називається об’єднанням множин та як зобразити дану операцію за допомогою кругів Ейлера?
6. Сформулюйте означення різниці, перерізу та доповнення множин. Як їх зобразити за допомогою кругів Ейлера? Чи є інший спосіб зображення операцій над множинами? Якщо так, то який, на вашу думку, найкращий?
   Обґрунтуйте відповідь.
7. Що називається декартовим добутком множин?

# *Модуль 1.*

# Елементи лінійної та векторної алгебри

## ТЕМА 01. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МАТРИЦЬ ТА ВИЗНАЧНИКІВ

***План***

1. *Визначники II-го та III-го порядку.*
2. *Властивості визначників.*
3. *Мінори і алгебраїчні доповнення. Теорема розкладу визначника за елементами будь-якого рядка (стовпця).*
4. *Означення матриці. Види матриць.*
5. *Дії над матрицями.*
6. *Обернена матриця.*
7. *Знаходження оберненої матриці за допомогою елементарних перетворень.*
8. *Ранг матриці. Знаходження рангу з використанням елементарних перетворень.*
9. *Використання матриць для розв'язування професійних завдань.*

*Основні терміни та поняття:* визначники (детермінанти) II-го та III-го порядків, мінор, алгебраїчне доповнення, правило трикутників, квадратна матриця, транспонована матриця, симетрична матриця, матриця-рядок, матриця-стовпець, обернена матриця, ранг матриці.

## *СТОРІНКА ІСТОРІЇ*

*У XVIII-XIX століттях в алгебрі основні зусилля математиків були спрямовані на розв'язання декількох проблем, серед яких – розв'язування систем алгебраїчних рівнянь з кількома невідомими. Над нею працювали Г.Лейбніц, К.Маклорен, Г.Крамер, П.Лапласс, К.Гаусс та інші. Дослідження систем лінійних рівнянь спричинило виникнення таких понять, як визначник і матриця. Основи теорії визначників закладено в роботах Г.Крамера, їх строга дедуктивна теорія побудована О.Коші в 1815 р., а з 40-х років вони стають універсальним інструментом в алгебрі й аналізі. З часом відбувається відокремлення понять* ***матриця і визначник****. Остаточно це відокремлення відбулося в роботах А.Келі та Д.Сільвестера. Останній ввів термін "матриця" у 1850 р. Основи матричного числення викладені А.Келі в роботі "Мемуар з теорії матриць" (1858). Розробка теорії матриць і визначників сприяла розвитку теорії квадратичних форм і теорії інваріантів рівнянь. Усі ці теорії пізніше лягли в основу формування нової галузі алгебри –* ***лінійної алгебри****.*

## 1 . Визначники ІІ-го та ІІІ-го порядку

***Означення. Визначником (детермінантом) другого порядку*** *називається число, яке символічно записується у вигляді:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad (1.1)$$

де $a_{11}, a_{12}$ – елементи першого рядка; $a_{21}, a_{22}$ – елементи другого рядка (на номер рядка вказує перша цифра індексу); $a_{11}, a_{21}$ – елементи першого стовпця; $a_{12}, a_{22}$ – елементи другого стовпця (номер стовпця – це друга цифра індексу); $a_{11}, a_{22}$ – елементи головної діагоналі; $a_{21}, a_{12}$ – елементи побічної діагоналі.

***Зауваження.*** Порядок визначника вказує на кількість його рядків та стовпців.

Для обчислення визначника другого порядку користуються формулою:

| На прикладі | В загальному |
|---|---|
| $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - (-1) \cdot 2 = 12 + 2 = 14$ | $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ (1.2) |

***Означення. Визначником третього порядку*** *називається число, яке символічно записується у вигляді:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad (1.3)$$

де $a_{ij}$ – елементи *i*-го рядка та *j*-го стовпця ($i = 1;2;3;\quad j = 1;2;3$); $a_{11}, a_{22}, a_{33}$ – елементи головної діагоналі; $a_{31}, a_{22}, a_{13}$ – елементи побічної діагоналі.

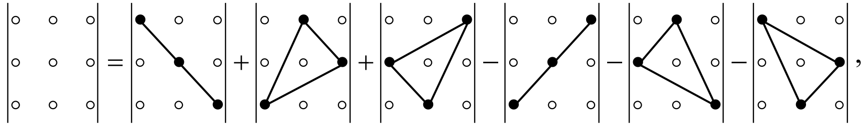
Визначник третього порядку обчислюється за формулою (так зване "***правило трикутника***"):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (\underbrace{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}}_{\text{відповідно головній діагоналі}}) - (\underbrace{a_{31}a_{22}a_{13} + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{32}a_{23}a_{11}}_{\text{відповідно побічній діагоналі}}) \qquad (1.4)$$

або

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underbrace{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}}_{\text{відповідно головній діагоналі}} - \underbrace{a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}}_{\text{відповідно побічній діагоналі}} \qquad (1.5)$$

Схематично правило трикутника можна зобразити так:



де точки, з’єднані лініями, – це елементи визначника, які необхідно перемножити.

**Завдання 13.** Обчисліть визначник $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

*Розв'язання*

Для того, щоб обчислити визначник, використаємо формулу (1.4) або (1.5), зазначивши, що

$$a_{11} = 3, \quad a_{12} = 0, \quad a_{13} = -1,$$
$$a_{21} = 2, \quad a_{22} = 1, \quad a_{23} = 4,$$
$$a_{31} = -2, \quad a_{32} = 2, \quad a_{33} = 3.$$

Отримаємо:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (\underbrace{3 \cdot 1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 \cdot (-1)}_{\text{відповідно головній діагоналі}}) - (\underbrace{(-2) \cdot 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 3}_{\text{відповідно побічній діагоналі}}) =$$
$$= 9 - 0 - 4 - 2 - 0 - 24 = -21.$$

**Відповідь:** -21.

Обчислювати визначник можна і за ***"правилом ліній"***, суть якого полягає в наступному: до заданого визначника з правого боку дописуємо елементи першого і другого стовпців, тобто визначник, наприклад, третього порядку набуде вигляду:

$$\Delta = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

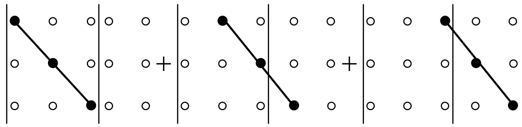
і обчислюватиметься за формулою:

$$\Delta = S_1 - S_2, \tag{1.6}$$

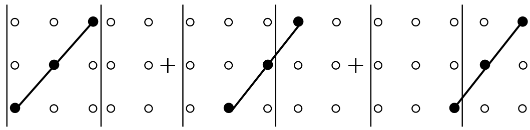
де $S_1 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$;

$$S_2 = a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Схематично дане правило можна зобразити так:

$S_1 =$ 

та

$S_2 =$ ,

де точки, виділені жирним шрифтом, – це елементи визначника, які необхідно перемножити.

## 2. Властивості визначників

Сформулюємо ***основні властивості визначників*** (для випадку третього порядку).

Для початку дослідимо, що відбудеться у випадку, коли елементи відповідних рядків і стовпців конкретного визначника, наприклад $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, поміняти місцями?

Для цього обчислимо окремо два визначники: даний в умові

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0,$$

та новий, що утвориться з даного після заміни відповідних рядків на відповідні стовпці:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 96 + 84 - 105 - 72 - 48 = 0.$$

Як бачимо, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$.

Поширимо дане твердження на множину всіх дійсних чисел.

***Властивість 1.*** Визначник не зміниться, якщо відповідні рядки замінити відповідними стовпцями:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

***<u>Зауваження.</u>*** Дане твердження встановлює рівноправність рядків і стовпців визначника, тому всі подальші властивості будуть справедливими як для рядків, так і для стовпців, та мають один спосіб доведення.

***Властивість 2.*** Якщо поміняти місцями довільні два рядки (стовпці), то визначник змінить знак на протилежний:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}.$$

***Властивість 3.*** Якщо один з рядків (стовпців) визначника складається з нулів, то визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

***Властивість 4.*** Якщо визначник має два однакових рядки (стовпці), то він дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a & a \\ a_{21} & b & b \\ a_{31} & c & c \end{vmatrix} = 0 .$$

***Властивість 5.*** Спільний множник, що міститься в усіх елементах одного рядка (стовпця), можна винести за знак визначника:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & k\cdot a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & k\cdot a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & k\cdot a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ k\cdot a_{31} & k\cdot a_{32} & k\cdot a_{33} \end{vmatrix} = k\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

***Властивість 6.*** Якщо елементи будь-якого рядка (стовпця) пропорційні елементам іншого рядка (стовпця), то такий визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & k\cdot a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 .$$

***Властивість 7.*** Якщо до елементів довільного рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне і те ж відмінне від нуля число, то значення визначника при цьому не зміниться:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+k\cdot a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+k\cdot a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+k\cdot a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

***Властивість 8.*** Для визначників справедливою є формула:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

Тобто визначник суми дорівнює сумі визначників. Аналогічно визначник різниці дорівнює різниці визначників.

## 3. Мінори і алгебраїчні доповнення

***Означення. Мінором елемента*** $a_{ij}$ ***визначника третього порядку*** *називається визначник другого порядку, який одержується з визначника третього порядку шляхом викреслювання рядка і стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент:*

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (1.6)$$

***Означення. Алгебраїчним доповненням*** $(A_{ij})$ ***елемента*** $a_{ij}$ *називається число, яке обчислюється за формулою:*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}, \qquad (1.7)$$

де $M_{ij}$ – мінор елемента $a_{ij}$.

Так, для визначника третього порядку алгебраїчне доповнення елемента $a_{ij}$ буде:

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Введені поняття мінору та алгебраїчного доповнення дозволяють сформулювати теорему, яка допоможе обчислити визначник, розклавши його за елементами будь-якого рядка (стовпця).

***Теорема.*** Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх відповідні алгебраїчні доповнення.

Тобто

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \qquad (1.8)$$

**Завдання 14.** Обчисліть визначник третього порядку $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ за елементами першого рядка.

*Розв'язання*

Щоб обчислити визначник за елементами першого рядка, скористаємось формулою (1.8), врахувавши, що

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \underbrace{2}_{a_{11}} \cdot \underbrace{(-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}_{A_{11}} + \underbrace{1}_{a_{12}} \cdot \underbrace{(-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}_{A_{12}} + \underbrace{0}_{a_{13}} \cdot \underbrace{(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}}_{A_{13}} =$$

$$= 2 \cdot (6-0) - (-2-20) + 0 = 12 + 22 = 34.$$

**Відповідь:** 34.

## 4. Означення матриці. Види матриць

***Означення.*** ***Матрицею*** *називається прямокутна таблиця чисел, яка складається з $m$ рядків та $n$ стовпців.* Позначається

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.9)$$

## *СТОРІНКА ІСТОРІЇ*

*Вперше матриці, які називалися "чарівним квадратом", зустрічалися ще в Древньому Китаї. Основною сферою їх застосування було розв'язання лінійних рівнянь. "Чарівні квадрати" були відомі також і арабським математикам. Приблизно тоді ж і з'явився принцип додавання матриць.*

*Сам термін* ***"матриця"*** *ввів у 1850 році відомий англійський математик Джеймс Джозеф Сильвестр (1814-1897).*

*Відомий своїми працями в теорії матриць, теорії чисел, комбінаториці майбутній вчений почав вивчати математику в Сент-Джон-коледжі Кембриджського університету в 1831 році. Проте довготривалі хвороби та небажання міняти віросповідання (що було основною умовою для отримання ступеня бакалавра в тогочасній Англії) привели до того, що лише в 1841 році він отримав бажані ступені бакалавра та магістра в Трініті-коледжі Дубліна. І відразу ж Сильвестр ненадовго переїжджає до США щоб стати професором в Університеті Вірджинії. Повернувшись до Англії, тісно спілкується зі своїм другом англійським математиком Артуром Кєлі (1821-1895), обговорюючи теорію інваріантів. В 1877 році Дж. Сильвестр знову їде до Америки, стає першим професором математики в Університеті Джона Хопкінса та засновує "Американський математичний журнал" (1878).*

*Повернувшись до Англії, в 1883 році очолює кафедру геометрії в Оксфордському університеті. На цій посаді він і перебуває до кінця свого життя.*

*Іменем Сильвестра названа бронзова медаль (Медаль Сильвестра), яка вручається з 1901 року Королівським товариством за видатні заслуги в математиці.*

Якщо кількість рядків дорівнює кількості стовпців, то така матриця називається ***квадратною***.

***Означення. Визначником квадратної матриці*** *називається число*:

$$\Delta(A)=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix}. \qquad (1.10)$$

| На прикладі | | У загальному |
|---|---|---|
| $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ <br> $A_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ | або | $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$, <br> при $m=n$ |

Розглянемо види матриць.

1. Якщо в матриці поміняти місцями рядки та стовпці, то отримаємо ***транспоновану матрицю.***

| На прикладі | У загальному |
|---|---|
| Якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, то | Якщо $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$,то |

| | |
|---|---|
| $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ | $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{m2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ (1.11) |

2. Квадратна матриця називається ***симетричною,*** якщо $a_{ij} = a_{ji}$.

| На прикладі | У загальному |
|---|---|
| $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ | $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$, де $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{14} = a_{41}$, ... |

3. Якщо у квадратній матриці всі елементи, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, то така матриця називається ***діагональною***.

| На прикладі | У загальному |
|---|---|
| $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ | $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ |

4. Якщо у діагональній матриці елементи головної діагоналі дорівнюють одиницям, то матриця називається ***одиничною*** і позначається $\mathrm{E}$:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \qquad (1.12)$$

5. Матриця, визначник якої дорівнює нулю, називається ***особливою*** (або ***виродженою***). Якщо визначник матриці не дорівнює нулю, то матриця ***неособлива*** (***невироджена***).

Наприклад, матриця $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ – неособлива, бо $\Delta(A)=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=18-20=-2\neq 0$, а матриця $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ – особлива, бо $\Delta(B)=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}=24-24=0$.

6. Матриця, яка складається тільки з одного рядка, називається ***матрицею-рядком***. Аналогічно матриця, яка складається з одного стовпця, називається ***матрицею-стовпцем***.

| На прикладі | У загальному |
|---|---|
| Матриця-рядок $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$<br>Матриця-стовпець $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ | $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$<br>$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ |

7. Дві матриці вважаються ***рівними***, якщо вони мають однакову кількість рядків і стовпців, а їх відповідні елементи рівні.

8. Дві матриці називаються ***еквівалентними***, якщо одна з них отримана з іншої шляхом виконання скінченного числа елементарних перетворень.

9. Припустимо, що задана будь-яка квадратна матриця $n$-порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Виберемо довільний елемент $a_{ik}$ цієї матриці і викреслимо з неї той рядок і той стовпець, на перетині яких міститься даний елемент. У результаті дістанемо матрицю $(n-1)$-го порядку, яку називають ***субматрицею*** матриці $A$, що відповідає елементу $a_{ik}$, та позначають її $D_{ik}$. Наприклад, для матриці третього порядку існує дев'ять субматриць (за кількістю елементів вихідної матриці). Визначник субматриці є мінором даної матриці.

## **<u>5. Дії над матрицями</u>**

Над матрицями можна виконувати ряд операцій.

***<u>1. Додавання (віднімання) матриць</u>***. Додавати і віднімати можна матриці однакових розмірностей (порядків). Для того, щоб додати (відняти) дві матриці, необхідно додати (відняти) їх відповідні елементи. Нехай

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}, \text{ тоді}$$

$$A \pm B=\begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

Для операцій додавання (віднімання) матриць істинними є такі властивості:

1. $A+B=B+A$;
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$;
3. $\overline{0}+A=A$;
4. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;
5. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)=\beta(\alpha A)$, де $\alpha,\beta \in R$;
6. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;
7. $0 \cdot A=\overline{0}$.

***<u>2. Множення матриці на число</u>***. Щоб помножити матрицю на число, необхідно всі елементи цієї матриці помножити на дане число, тобто

$$k \cdot A=\begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \dots & k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \dots & k \cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k \cdot a_{m1} & k \cdot a_{m2} & \dots & k \cdot a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

**Завдання 15.** Обчисліть значення виразів $A+B$, $A-B$, $2A+3B$ для двох даних матриць

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix} \text{ та } B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

*Розв'язання*

Щоб обчислити суму двох матриць $A+B$ згідно з формулою (2.13), необхідно до елементів матриці А додати відповідні елементи матриці В.

$$A+B=\begin{pmatrix}3+0 & -1+2 & 2+1\\ 4+3 & 1+(-1) & 0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\ 7 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Різницю двох матриць отримаємо, віднявши їх відповідні елементи. Тому

$$A-B=\begin{pmatrix}3-0 & -1-2 & 2-1\\ 4-3 & 1-(-1) & 0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

Значення виразу $2A+3B$ можна отримати послідовно. Спочатку всі елементи матриці $A$ помножити на число "2", а всі елементи матриці В – на число "3". Лише після цього записати нову матрицю, елементами якої будуть суми відповідних елементів нових матриць $2A$ та $3B$.

Вірним буде й такий спосіб оформлення розв'язання:

$$2A+3B=\begin{pmatrix}2\cdot3 & 2\cdot(-1) & 2\cdot2\\ 2\cdot4 & 2\cdot1 & 2\cdot0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\cdot0 & 3\cdot2 & 3\cdot1\\ 3\cdot3 & 3\cdot(-1) & 3\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6 & -2 & 4\\ 8 & 2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 6 & 3\\ 9 & -3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+0 & -2+6 & 4+3\\ 8+9 & 2+(-3) & 0+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 4 & 7\\ 17 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

**Відповідь:** $A+B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\ 7 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $A-B=\begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$; $2A+3B=\begin{pmatrix}6 & 4 & 7\\ 17 & -1 & 3\end{pmatrix}$.

***3. Множення матриці на матрицю***. Для того, щоб помножити матрицю $A$ на матрицю $B$, необхідно, щоб вони були ***узгодженими*****,** тобто, щоб кількість стовпців матриці $A$ дорівнювала кількості рядків матриці $B$.

***Означення. Добутком матриці*** $A$ ***на матрицю*** $B$ *називається така матриця* $C$*, у якої елемент* $c_{ij}$ *дорівнює сумі добутків елементів* $i$*- того рядка матриці* $A$ *на відповідні елементи* $j$*- того стовпця матриці* $B$*, тобто* $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$.

**Завдання 16.** Дослідіть, чи можна помножити задані матриці. У випадку стверджувальної відповіді виконайте множення.

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

*Розв'язання*

**а)** Квадратні матриці одного порядку завжди є узгодженими (бо кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої), тому можемо виконувати операцію множення матриці на матрицю.

Для цього елементи першого рядка першої матриці *A* множимо на відповідні елементи першого стовпця другої матриці *B* і знаходимо їх суму:

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 1 + 6 + 12 = 19.$$

Таким чином, число 19 є першим елементом матриці добутку, яке записуємо на місце $a_{11}$.

***Зауваження.*** Зазначимо, що місце нового елемента результуючої матриці визначається індексом, де перша цифра вказує на номер рядка першої матриці, а друга – на номер стовпця другої матриці, що множаться. Тобто елемент $a_{21} = 21$ отримали, помноживши другий рядок матриці А на перший стовпець матриці В.

Процес знаходження матриці добутку пропонуємо записати так:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 & 4 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & 4 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+6+12 & 0-2+3 & 0-2+3 \\ 4+9+8 & 0-3+2 & 0-3+2 \\ 1+3+8 & 0-1+2 & 0-1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 1 & 1 \\ 21 & -1 & -1 \\ 12 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**б)** Дані матриці є узгодженими, бо кількість стовпців матриці $A$ дорівнює 2 та кількість рядків матриці $B$ також дорівнює 2. Отже, ми можемо множити дані матриці, використовуючи міркування, аналогічні до пункту а) даного завдання:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-4 & 2+0 & 3-2 \\ 0+2 & 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Відповідь:** а) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 19 & 1 & 1 \\ 21 & -1 & -1 \\ 12 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;б) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Для операції множення матриць справедливими є такі властивості:

1. $AB \neq BA$;
2. $(AB)C = A(BC)$;

3. $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$;
4. $(A+B)C = AC + BC$;
5. $C(A+B) = CA + CB$;
6. $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$;
7. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

## 6. Обернена матриця

Розглянемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}. \tag{1.15}$$

Нехай

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – матриця, що складається з коефіцієнтів системи, що знаходяться біля невідомих;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець вільних членів;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець невідомих системи.

Систему рівнянь (1.15) запишемо у матричній формі:

$$A \cdot X = B \tag{1.16}$$

***Означення.*** *Матриця* $A^{-1}$ *називається* ***оберненою*** *до матриці* $A$*, якщо виконується умова:*

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E \tag{1.17}$$

***<u>Зауваження.</u>*** Обернена матриця існує тільки для квадратної матриці, визначник якої не дорівнює нулю.

**Для того, <u>щоб знайти обернену матрицю,</u> необхідно**:

1) обчислити визначник $\Delta(A)$ даної матриці $A$;

2) обчислити алгебраїчні доповнення $A_{ij}$ всіх елементів даної матриці $A$;

3) користуючись формулою, знайти обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \cdot \widetilde{A}, \tag{1.18}$$

де $\widetilde{A}$ – союзна матриця, тобто

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

4) виконати перевірку $A^{-1} \cdot A = E$.

**Завдання 17.** Для даної матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ знайдіть обернену матрицю $A^{-1}$.

*Розв'язання*

Процес знаходження оберненої матриці виконаємо поетапно з використанням формул (1.18) , (1.19).

1) Обчислимо визначник $\Delta(A)$ даної матриці $A$:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 - 8 - 10 - 12 = -27 \cdot$$

2) Обчислимо алгебраїчні доповнення $A_{ij}$ всіх елементів даної матриці $A$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -4; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -9;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -7; \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 18;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8; \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -9;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

3) Використаємо формули (2.18) та (2.19) для запису оберненої матриці:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta(A)}\cdot\widetilde{A}=\frac{1}{\Delta(A)}\cdot\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=-\frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix}-4&-9&1\\-7&18&-5\\8&-9&-2\end{pmatrix}.$$

4) Перевіримо, чи дійсно отримана матриця є оберненою до даної.

$$A^{-1}\cdot A=-\frac{1}{27}\begin{pmatrix}-4&-9&1\\-7&18&-5\\8&-9&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&-1\\2&0&1\\3&4&5\end{pmatrix}=-\frac{1}{27}\begin{pmatrix}-12-18+3&-4+0+4&4-9+5\\-21+36-15&-7+0-20&7+18-25\\24-18-6&8+0-8&-8-9-10\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix}-27&0&0\\0&-27&0\\0&0&-27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$$

**Відповідь:** $A^{-1}=-\frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix}-4&-9&1\\-7&18&-5\\8&-9&-2\end{pmatrix}.$

## 7. Знаходження оберненої матриці за допомогою елементарних перетворень

Обернену матрицю до матриці $n$-го порядку можна знайти і за допомогою елементарних перетворень. Для цього записуємо матрицю, перші $n$ стовпців якої – це дана матриця $A$, а наступні $n$ стовпців, які відділені вертикальною рискою від даної, є одиничною матрицею $E$. Провівши ряд елементарних перетворень, отримаємо запис, де на першому місці стоїть одинична матриця $E$, а матриця, відокремлена рискою, і буде шуканою оберненою матрицею: $\left(A|E\right)\Leftrightarrow\left(E|A^{-1}\right)$.

**Завдання 18.** Для даної матриці $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$ знайдіть обернену з допомогою елементарних перетворень.

*Розв'язання*

Запишемо матрицю $\grave{A}^*$ і проведемо елементарні перетворення

$$A^*\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -4 & 1 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -3 & -2 & -4 & 1\end{array}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3}\end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3}\end{array}\right).$$

У результаті проведених елементарних перетворень матриця А перетворилась на одиничну, а одинична – на обернену $A^{-1}$.

**Відповідь:** $A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 2 & 4 & -1\end{pmatrix}$.

## 8. Ранг матриці. Знаходження рангу матриці з використанням елементарних перетворень

Нехай задано матрицю $A$ розмірності $m\times n$ ($m-$число рядків даної матриці, $n-$число стовпців). Виділимо у матриці будь-які $k$ рядків і стільки ж стовпців, де $k-$число, не більше чисел $m$ і $n$, тобто $k\le\min(m,n)$.

Нагадаємо означення мінору.

***Означення.*** *Визначник порядку $k$, що складається з елементів, які стоять на перетині виділених рядків і стовпців, називається **мінором $k$-го порядку матриці** $A$.*

***Означення.*** ***Рангом*** *матриці $A$ (позначається $r(A)$) називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля.*

Безпосередньо з означення випливає, що:

1) ранг існує для будь-якої матриці $A_{m\times n}$, причому $0 \le r(A) \le \min(m,n)$;
2) $r(A) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $A = 0$ (всі елементи матриці дорівнюють нулю – ***нулева матриця***);
3) для квадратної матриці $n$-го порядку ранг дорівнює $n$ тоді і тільки тоді, коли матриця невироджена.

**Ранг** матриці **можна знайти методом обрамлення**:

- якщо всі мінори першого порядку (елементи матриці $A$) дорівнюють нулю, то $r(A) = 0$;
- якщо хоч один з мінорів першого порядку відмінний від нуля, а всі мінори другого порядку дорівнюють нулю, то $r(A) = 1$;
- якщо хоч один з мінорів другого порядку відмінний від нуля, то досліджуємо мінори третього порядку і т.д.;
- продовжуємо так доти, доки або всі мінори порядку $k$ дорівнюють нулю, або мінорів порядку $k$ не існує, тоді $r(A) = k - 1$.

**Завдання 19.** Дослідіть значення найбільшого, відмінного від нуля, порядку мінору матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання*

Викресленням будь-якої кількості рядків і стовпців неможливо одержати із заданої матриці квадратну матрицю порядку вище четвертого. Звідси випливає, що її ранг не може бути більше чотирьох.

Оскільки у даній матриці є мінори першого порядку (елементи матриці), відмінні від нуля, то виділимо мінори другого порядку і перевіримо, чи є серед них відмінний від нуля. Записуючи враховуємо, що $M_k^n$ – мінор, де $k$ – порядок мінору, $n$ – порядковий номер при обчисленні. Починаємо із лівого верхнього кута:

$$M_2^1 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0; \quad M_2^2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2 \neq 0.$$

Це означає, що ранг матриці дорівнює 2 або більший за 2. Необхідно перевірити, чи існує хоч один мінор третього порядку, що обрамляє (містить у собі) мінор $M_2^2$, відмінний від нуля. Виділимо мінор третього порядку:

$$M_3^3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 + 0 + 3 + 0 - 4 - 2 = 3 - 2 = 1 \neq 0.$$

Це означає, що ранг матриці дорівнює 3 або більший 3. Виділимо мінор четвертого порядку, що обрамляє (містить у собі) мінор $M_3^3$. Він буде складатися зі стовпців першого, другого, третього та четвертого:

$$M_4^4 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \\ -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} + (-4)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & -4 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+3}\cdot;$$

$$\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & -7 & -4 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & -7 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Аналогічно обчислюємо ще один мінор четвертого порядку, що складається зі стовпців першого, другого, третього, п’ятого та обрамляє мінор $M_3^3$:

$$M_4^5 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0\cdot$$

Отже, оскільки всі мінори четвертого порядку дорівнюють нулю, то $r(A) = 3$.

**Відповідь:** $r(A) = 3$.

Обчислити ранг матриці можна і за допомогою елементарних перетворень.

**Теорема.** *Ранг матриці не змінюється при лінійних операціях з її рядками.*

Доведення. Лінійні операції з рядками довільної матриці приводять до тих самих лінійних операцій з рядками довільної субматриці. Проте при лінійних операціях з рядками квадратних матриць визначники цих матриць отримують один з одного множенням на число, відмінне від нуля. Звідси нульовий визначник залишається нульовим, а відмінний від нуля – відмінним від нуля, тобто не може змінитися найвищий порядок відмінного від нуля визначника субматриць (мінору). Не впливає, очевидно, на ранг матриці й перестановка стовпців, оскільки така перестановка може впливати лише на знак відповідних визначників. Теорему доведено.

Із розглянутої теореми виходить, що перетворені матриці мають той самий ранг, що й вихідні. Тому ранг основної матриці системи рівнянь першого степеня дорівнює числу одиниць на головній діагоналі перетвореної матриці.

**Завдання 20.** Обчисліть ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ за допомогою елементарних перетворень.

*Розв'язання*

Використаємо запис із знаком $\Rightarrow$, який вказує, що з'єднані ним матриці одержуються одна з одної елементарними перетвореннями, а тому вони мають один і той самий ранг.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Над вихідною матрицею провели такі перетворення:

1) першу перетворену матрицю отримаємо із вихідної, віднявши від третього рядка перший, помножений на 2 і записавши результат на місце третього рядка;

2) другу перетворену матрицю отримаємо, поділивши другий стовпчик на 2;

3) третя перетворена матриця – від першого стовпчика віднімемо другий, помножений на 3, і запишемо результат на місце першого стовпця; від третього стовпця віднімемо другий і запишемо на місце третього стовпця; від четвертого стовпця віднімемо другий, помножений на 2, та запишемо на місце четвертого стовпця;

4) четверта – до третього рядка додаємо другий, помножений на 3, і записуємо на місце третього рядка;

5) наступна – перший стовпець поділимо на 2;

6) шоста перетворена матриця – до третього стовпця додамо перший і запишемо на місце третього, а від четвертого віднімемо перший і запишемо на місце четвертого;

7) остання матриця – поміняємо місцями перший і другий стовпці.

З утвореної матриці можна виділити субматрицю другого порядку, визначник якої не дорівнює нулю. Тому ранг вихідної матриці $r = 2$.

**Відповідь:** ранг матриці дорівнює 2.

## 9. Використання матриць для розв'язування професійних завдань

Матриці дають змогу скорочувати записи та застосовувати однакові міркування для різних об'єктів, тобто приводять до унаочнення, спрощення і компактності обчислень.

**Завдання 21.** Підприємство випускає продукцію двох видів, використовуючи при цьому сировину трьох типів. Витрати сировини на виробництво продукції задаються матрицею:

$$S = \left(s_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

де $s_{ij}$ – кількість одиниць сировини $i$-го типу, що використовується на виготовлення одиниці продукції $j$-го виду. План щоденного випуску продукції передбачає 90 одиниць продукції першого виду і 120 одиниць продукції другого виду. Вартість одиниці кожного типу сировини відповідно дорівнює 8, 5 і 10 одиниць. Дослідіть загальні витрати сировини V, необхідної для щоденного випуску продукції, а також загальну вартість C цієї сировини.

*Розв'язання*

Запишемо вихідні дані задачі у вигляді матриць:

$S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 3 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ – витрати сировини (три типи) на виробництво продукції двох видів;

$P=\begin{pmatrix}90\\ 120\end{pmatrix}$ – план щоденного випуску продукції;

$Q=\begin{pmatrix}8 & 5 & 10\end{pmatrix}$ – вартість одиниці кожного типу сировини.

Загальні витрати сировини планового випуску продукції можна знайти як добуток витрат сировини та плану щоденного випуску продукції, тобто

$$V=SP=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 3 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}90\\ 120\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot 90+4\cdot 120\\ 3\cdot 90+1\cdot 120\\ 2\cdot 90+3\cdot 120\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}930\\ 390\\ 540\end{pmatrix}.$$

Отже, для щоденного випуску продукції використовується 930, 390 і 540 одиниць сировини першого, другого та третього типів відповідно.

Загальну вартість сировини знайдемо як добуток вартості одиниці кожного типу сировини на загальні витрати сировини, тобто

$$C = QV = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 930 \\ 390 \\ 540 \end{pmatrix} = \left( 8 \cdot 930 + 5 \cdot 390 + 10 \cdot 540 \right) = 14790.$$

**Відповідь:** $V = \begin{pmatrix} 930 \\ 390 \\ 540 \end{pmatrix}$; $C = 14790$.

За допомогою матриць формулюють та розв'язують спрощену економіко-математичну модель міжгалузевого балансу, яка була розроблена у 1936 році американським економістом В. Леонтьєвим. Мета балансового аналізу – відповісти на питання: яким має бути обсяг виробництва кожної з $n$ галузей, щоб задовольнити всі потреби в продукції цієї галузі? Вважається, що кожна з галузей випускає лише один певний вид продукції та потребує в процесі виробництва продукції, виготовленої в інших галузях. Тобто кожна галузь виступає, з одного боку, як виробник даної продукції, а з іншого – як споживач і своєї, і виробленої іншими галузями продукції. При цьому припускається, що співвідношення витраченої та випущеної продукції є сталим.

У матричному вигляді так звану ***модель Леонтьєва*** (***рівняння лінійного міжгалузевого балансу***) записують:

$$X = AX + Y, \tag{1.20}$$

де $X$ – обсяг валової продукції $i$-ї галузі за одиницю часу (наприклад, за рік);

$Y$ – обсяг кінцевої продукції $i$-ї галузі, призначеної для невиробничого споживання;

$A$ – квадратна матриця коефіцієнтів прямих витрат $a_{ij}$, значення яких обчислюються за формулою:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \quad i, j = 1,2,3,\ldots,n, \tag{1.21}$$

тобто є часткою від ділення обсягу міжгалузевих поставок $i$-ї галузі в $j$-ту (у формулі (1.21) $x_{ij}$) та обсягу валової продукції $j$-ї галузі ($X_j$ у (1.21)).

***Зауваження.*** Матрицю $A$ називають ще *матрицею технологічних коефіцієнтів* (*технологічною матрицею*) через те, що вона містить інформацію про структуру міжгалузевих зв'язків, про технологію виробництва даної економіко-виробничої системи. Якщо всі коефіцієнти даної матриці невід'ємні, то вона називається *продуктивною*. Тоді і *модель Леонтьєва – продуктивна*.

***Основна задача міжгалузевого балансу*** полягає у відшуканні такої матриці обсягів валової продукції $X$, яка за відомої матриці прямих витрат $A$ забезпечує задану матрицю обсягів кінцевої продукції $Y$.

*Рівняння міжгалузевого балансу можна використовувати у двох випадках*:
1) коли відома матриця обсягів валової продукції $X$, а потрібно обчислити матрицю обсягів кінцевої продукції $Y$, тобто рівняння (1.20) набуває вигляду:

$$Y = \left(E - A\right) \cdot X\ ; \tag{1.22}$$

2) коли відома матриця обсягів кінцевої продукції $Y$, а потрібно спланувати обсяг валової продукції, тобто з рівності (1.20) необхідно визначити значення матриці $X$:

$$X = \left(E - A\right)^{-1} \cdot Y\ . \tag{1.23}$$

***Зауваження.*** Матриця $\left(E - A\right)^{-1}$ називається *матрицею повних витрат* – така матриця, кожен елемент якої є обсягом валової продукції $i$-ї галузі, необхідної для забезпечення випуску одиниці кінцевої продукції $j$-ї галузі $(i, j = 1,2,3,...,n)$.

**У результаті вивчення теми студенти повинні:**

| ***знати*** | ***вміти*** |
| --- | --- |
| - означення визначників другого та третього порядків, мінору та алгебраїчного доповнення;<br>- правила знаходження визначників другого та третього порядків, властивості визначників;<br>- теорему розкладу визначників за елементами довільного рядка (стовпця);<br>- поняття матриці, різновиди матриць та дії, які можна виконувати над матрицями;<br>- способи знаходження оберненої матриці;<br>- означення рангу матриці та способи його обчислення | - обчислювати визначники другого та третього порядків, використовуючи правила, та розкладом за елементами довільного рядка або стовпця;<br>- виконувати дії над матрицями;<br>- знаходити обернену матрицю;<br>- обчислювати ранг матриці |

## Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення визначників ІІ-го та ІІІ-го порядків і запишіть їх у загальному вигляді.
2. Якими способами можна обчислити визначники?
3. Запишіть формули для обчислення визначників ІІ-го та ІІІ-го порядків.
4. Сформулюйте основні властивості визначників.
5. Чому дорівнює визначник, у якого стовпець або рядок складаються з нулів?
6. Дайте означення мінору елемента та запишіть формулу для його обчислення.
7. Що називається алгебраїчним доповненням елемента і де його можна використати?
8. Що означає: розкласти визначник за елементами довільного рядка (стовпця)?
9. Що називається матрицею?
10. Яка матриця називається квадратною? Що називається визначником квадратної матриці?
11. Які види матриць ви знаєте? Сформулюйте їх означення.
12. Сформулюйте та запишіть основні дії, які можна проводити над матрицями.
13. Основні властивості операції додавання матриць (доведіть).
14. Основні властивості операції множення матриць (доведіть).
15. Яка матриця називається оберненою?
16. Які кроки необхідно зробити, щоб знайти обернену матрицю?
17. Запишіть загальний вигляд союзної матриці.
18. Сформулюйте означення рангу матриці.
19. Покроково опишіть процес знаходження рангу матриці.

# ТЕМА 02. ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

***План***

1. *Застосування визначників до розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (метод Крамера).*
2. *Використання визначників для розв'язування економічних задач.*
3. *Розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) матричним способом.*
4. *Використання методів Гаусса та Жордана-Гаусса для розв'язування СЛАР (з використанням елементарних перетворень).*
5. *Алгоритм розв'язання СЛАР методом Гаусса (з використанням розрахункових таблиць). Приклад розв'язання конкретної СЛАР методом Гаусса.*

*Основні твердження та поняття:* система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), метод Крамера, методи Гаусса та Жордана-Гаусса, матричний спосіб, алгоритм, елементарні перетворення, прямий та зворотний ходи, метод "прямокутника", головний елемент.

## 1. Застосування визначників до розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (метод Крамера)

Система двох лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з двома невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \qquad (2.1)$$

Для розв'язання такої системи використовують ***формули Крамера:***

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta}, \qquad (2.2)$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ – головний визначник, а $\Delta x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, та $\Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ – допоміжні визначники.

**Правило 1.** Якщо визначник $\Delta$ не дорівнює нулю, то СЛАР має тільки один розв'язок.

**Правило 2.** Якщо $\Delta = \Delta x_1 = \Delta x_2 = ... = \Delta x_n = 0$, то СЛАР має безліч розв'язків або не має жодного.

**Правило 3.** Якщо $\Delta = 0$ і хоча б один із допоміжних визначників не дорівнює нулю, то СЛАР розв'язків не має.

---

## *СТОРІНКА ІСТОРІЇ*

***Габріель Крамер (1704-1752)*** *— швейцарський математик, учень і друг Йоганна Бернуллі, один із творців лінійної алгебри.*

*Народився в м. Женева (Швейцарія), в сім'ї франкомовного лікаря. З раннього віку показав великі здібності до математики. У 18 років захистив дисертацію. У 20-річному віці Крамер виставив свою кандидатуру на вакантну посаду викладача на кафедрі філософії Женевського університету. Кандидатур було три, всі справили гарне враження, і магістрат прийняв соломонове рішення: заснувати окрему кафедру математики і направити туди (на одну ставку) двох «зайвих», включаючи Крамера, з правом подорожувати по черзі за свій рахунок.*

*У 1727 вчений скористався цим правом і 2 роки мандрував Європою, заодно переймаючи досвід у провідних математиків — Йоганна Бернуллі і Ейлера в Базелі, де Муавра в Лондоні, Мопертюї і Клеро в Парижі та інших. Повернувшись, він вступає з ними в листування, що тривало все його недовге життя.*

*У 1729 Крамер повертається до Женеви та відновлює викладацьку роботу. У вільний час він пише численні статті на найрізноманітніші теми: геометрія, історія математики, філософія, застосування теорії ймовірностей; публікує працю з небесної механіки (1730) та коментар до ньютонівської класифікації кривих третього порядку (1746). У 1742, на прохання Йоганна Бернуллі, Крамер публікує збірник праць колеги (у 4 томах), а незабаром (1744) випускає аналогічний (посмертний) збірник робіт Якоба Бернуллі і двотомник листування Лейбніца з Йганном Бернуллі. Всі ці видання мали величезний резонанс у науковому світі.*

*У 1747 здійснює другу подорож до Парижа, де знайомиться з видатним французьким математиком Д'Аламбером. У 1751, після дорожнього інциденту з каретою, Крамер отримує серйозну травму. Лікар рекомендує йому відпочити на французькому курорті, але там його стан погіршується і 4 січня 1752 Крамер помирає.*

*Найвідоміша з робіт Крамера, опублікована французькою мовою – «Вступ до аналізу алгебраїчних кривих» (1750). У ній вперше розглянуто систему довільної кількості лінійних рівнянь з квадратною матрицею. Рішення системи вчений подає у вигляді стовпця дробів із спільним знаменником — визначником матриці. Терміна «визначник» (детермінант) тоді ще не існувало (його ввів Гаусс в 1801), але Крамер дав точний алгоритм його обчислення. Цей алгоритм, пізніше названий методом Крамера, відразу ж отримав подальший розвиток у працях Безу, Вандермонда та Келі, які й завершили створення основ лінійної алгебри. Теорія визначників швидко знайшла безліч застосувань в астрономії і механіці (вікове рівняння), при рішенні алгебраїчних систем, дослідженні форм тощо.*

**Завдання 22.** Розв'яжіть систему $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 4x+y=5 \end{cases}$ методом Крамера.

*Розв'язання*

Запишемо та обчислимо головний та допоміжні визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3+8=11;\ \Delta x = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 1+10=11;\ \Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 15-4=11.$$

Тоді скористаємось формулами Крамера для знаходження невідомих $x$ та $y$:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{11}{11} = 1; \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{11}{11} = 1.$$

Обов'язковою є перевірка отриманого результату. Підставимо знайдені значення невідомих у вихідну систему (в обидва її рівняння):

$3\cdot 1 - 2\cdot 1 = 1$ – рівність виконується;

$4\cdot 1 + 1 = 5$ – рівність виконується.

**Відповідь:** $x=1$; $y=1$.

Використовувати формули Крамера можна для розв'язування системи з довільною кількістю змінних.

Таблиця 2.1

**Розв’язування СЛАР методом Крамера**

<table>
<tr><th>На прикладі системи трьох лінійних алгебраїчних рівнянь</th><th>В загальному</th></tr>
<tr><td>

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases};$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta};\ y = \frac{\Delta y}{\Delta},\ z = \frac{\Delta z}{\Delta},\ (2.3)$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ – головний

та

$$\left.\begin{aligned} &\Delta x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\Delta z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \end{aligned}\right\}$$

допоміжні визначники, що обчислюються або за правилом трикутників, або з допомогою теореми розкладу за довільним рядком (стовпцем)

</td><td>

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases};$$

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta};\quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta};\quad \ldots\quad;$$

$$x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}$$, де

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix}$$ – головний,

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_m & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$\Delta x_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & b_m \end{vmatrix}$$ –

допоміжні визначники (обчислюються за теоремою розкладу)

</td></tr>
</table>

**Завдання 23.** Розв’яжіть СЛАР $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 3x + 2y = 2 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$ методом Крамера.

*Розв’язання*

Запишемо та обчислимо головний та допоміжні визначники даної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 3 - 2 - 3 = -6$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 2 + 2 - 2 = 0$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 3 - 2 + 3 = -6$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 2 + 3 - 2 - 3 - 4 = -12$$

Тоді, використовуючи формули Крамера, матимемо:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{0}{-6} = 0, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-6}{-6} = 1, \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-12}{-6} = 2.$$

Виконаємо перевірку, підставивши отримані значення невідомих у всі рівняння початкової системи:

$2 \cdot 0 - 1 + 2 = 1$ – рівність виконується;

$3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$ – рівність виконується;

$0 + 1 - 2 = -1$ – рівність виконується.

**Відповідь:** $x = 0; \quad y = 1; \quad z = 2$.

***Зауваження.*** Отриманий розв’язок можна записати і у вигляді $(0;1;2)$.

## 2. Використання визначників для розв'язування економічних задач

Розглянемо дане питання на конкретному прикладі.

**Завдання 24.** Взуттєва фабрика спеціалізується на випуску виробів трьох типів $T_1$, $T_2$, $T_3$, використовуючи при цьому сировину трьох видів $B_1$, $B_2$, $B_3$. Норми витрат кожної сировини на одну пару взуття і обсяг витрат сировини на один день задані таблицею:

| Вид сировини | Норма витрат сировини на одну пару | | | Витрати сировини на 1 день |
|---|---|---|---|---|
| | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | |
| $B_1$ | 6 | 4 | 5 | 2400 |
| $B_2$ | 4 | 3 | 1 | 1450 |
| $B_3$ | 5 | 2 | 3 | 1550 |

Знайдіть щоденний обсяг випуску кожного типу взуття.

*Розв'язання*

Нехай щоденно фабрика випускає $x_1$ пар виробів $T_1$, $x_2$ пар виробів $T_2$ і $x_3$ пар виробів $T_3$. Тоді згідно з витратами сировини кожного виду маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2400 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 1450 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1550 \end{cases}.$$

Розв'яжемо дану систему за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -21, \quad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} 2400 & 4 & 5 \\ 1450 & 3 & 1 \\ 1550 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3150, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 6 & 2400 & 5 \\ 4 & 1450 & 1 \\ 5 & 1550 & 3 \end{vmatrix} = -5250,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 2400 \\ 4 & 3 & 1450 \\ 5 & 2 & 1550 \end{vmatrix} = -2100.$$

Отже,

$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-3150}{-21} = 150$, $x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-5250}{-21} = 250$,

$x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{-2100}{-21} = 100 \cdot$

Перевірка отриманого результату підтверджує його правильність.

**Відповідь:** фабрика випускає 150 пар взуття типу $T_1$, 250 пар типу $T_2$ і 100 пар типу $T_3$.

## 3. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь матричним методом

Розглянемо систему трьох рівнянь з трьома невідомими та запишемо її в загальному вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}.$$

Елементи даної СЛАР можна умовно поділити на три групи: коефіцієнти $a_{ij}$ біля невідомих величин, самі невідомі $x, y, z$ та вільні члени $b_j$ – значення, що розміщені після знака рівності. Тому, використовуючи поняття матриці та дій над матрицями, дану систему можна подати у матричному вигляді:

$$A \cdot X = B, \tag{2.4}$$

де $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – матриця коефіцієнтів біля невідомих,

$B = (b_j) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець вільних членів, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець невідомих.

Для того, щоб розв'язати СЛАР (знайти невідомі значення матриці X), її необхідно помножити зліва (порядок розміщення матриць при множенні суттєвий) на обернену матрицю, тобто

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \tag{2.5}$$

Тоді $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Враховуючи, що $E \cdot X = X$, матимемо:

$$X = A^{-1} \cdot B \tag{2.6}$$

Це і є ***формула для розв'язування СЛАР матричним способом***.

**Завдання 25.** Розв'яжіть СЛАР

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 12 \end{cases}$$ матричним способом.

*Розв'язання*

Запишемо дану систему у матричному вигляді, де

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ – матриця коефіцієнтів біля невідомих.

Елемент $a_{22} = 0$ тому, що невідома $x_2$ в другому рівнянні системи відсутня. Тобто дане рівняння можна розглядати у вигляді: $2x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 = 3$.

$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець вільних членів;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець невідомих.

Щоб скористатись формулою (2.6) для розв'язування системи матричним способом спочатку потрібно знайти обернену матрицю $A^{-1}$ для даної матриці $A$.

***<u>Зауважимо,</u>*** що обернену до даної матриці $A$ нами було вже знайдено для розв'язання завдання 17 (тема 01, питання 6). Отже,

$$A^{-1} = -\frac{1}{27}\begin{pmatrix} -4 & -9 & 1 \\ -7 & 18 & -5 \\ 8 & -9 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тоді, застосувавши формулу (2.6) та дію множення матриці на матрицю, матимемо:

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{27}\begin{pmatrix} -4 & -9 & 1 \\ -7 & 18 & -5 \\ 8 & -9 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} = -\frac{1}{27}\begin{pmatrix} -12-27+12 \\ -21+54-60 \\ 24-27-24 \end{pmatrix} = -\frac{1}{27}\begin{pmatrix} -27 \\ -27 \\ -27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Виконаємо перевірку отриманого результату:

$3 \cdot 1 + 1 - 1 = 3$ – рівність виконується;

$2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 = 3$ – рівність виконується;

$3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 12$ – рівність виконується.

**Відповідь:** $x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 1$.

## <u>4. Методи Гаусса та Жордана-Гаусса для розв'язування СЛАР (з використанням елементарних перетворень)</u>

Формули Крамера дають можливість, використовуючи спосіб обчислення визначників, знайти числові значення розв'язку системи рівнянь у випадку, коли головний визначник $\Delta$ відмінний від нуля. Проте практичне застосування цих формул у багатьох випадках ускладнене. Наприклад, при великій кількості невідомих трудомістким є процес обчислення визначників. Або якщо коефіцієнти рівнянь системи задані наближено (що у реальних задачах буває майже завжди), то похибка розв'язку може бути досить великою. Навіть у тому випадку, коли коефіцієнти в системі вихідних рівнянь відомі точно, але самі обчислення ведуться з урахуванням лише заданого числа значущих цифр, отримуються великі похибки в результаті. Тому при практичному розв'язуванні систем рівнянь використовуються інші способи обчислень, наприклад, методи Гаусса та Жордана-Гаусса.

## *СТОРІНКА ІСТОРІЇ*

***Карл Фрідріх Гаусс (1777-1855)*** *– в історії математики немає нікого, кого можна було б порівнювати з Гауссом за ранньою обдарованістю, яку він виявив у два роки.*

*Він народився в Німеччині, у сім'ї водопровідника. Замолоду захоплювався мовознавством і математикою, а в день свого 19-річчя зробив вибір на користь останньої. З 30 березня 1796 року Гаусс почав вести науковий щоденник, який став одним із найцінніших документів історії математики.*

*Основна особливість наукових робіт ученого – їх виключна різнобічність. Він займався вищою алгеброю, теорією чисел, диференціальною геометрією, теорією ймовірностей, теорією тяжіння, теорією електрики та магнетизму, питаннями капілярності, геодезією та астрономією. У всіх згаданих галузях Гаусс зробив оригінальні відкриття. Але математику він вважав царицею всіх наук, а арифметику – царицею математики.*

*Ще за життя його вважали рівним Архімеду та Ньютону, називали королем математики, про що свідчить надпис на медалі, виготовленій на його честь після смерті у 1855 році.*

Нехай задана система m рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ..................................... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (2.7)$$

де $a_{ij}$ – коефіцієнти системи рівнянь, $i = \overline{1,m}$ – номер рядка, $j = \overline{1,n}$ – номер стовпця, $b_i$ – вільні члени, $x_j$ – невідомі.

Дана система може бути розв'язана запропонованими методами з використанням елементарних перетворень або за допомогою таблиць. Зазначимо, що обчислення проводяться лише з коефіцієнтами рівнянь системи (2.7), тому немає потреби писати самі рівняння.

Розв’язуючи СЛАР методами Гаусса та Жордана-Гаусса **за допомогою елементарних перетворень,** достатньо написати лише розширену матрицю (матрицю, що складається з коефіцієнтів біля невідомих та стовпця вільних членів) системи. Варто пам’ятати, що рядки та стовпці розширеної матриці можна міняти місцями.

Якщо $a_{11} \neq 0$ (в протилежному випадку перестановкою рівнянь системи досягаємо того, що $a_{11} \neq 0$) і $n \neq m$, де $a_{11}$ – головний елемент СЛАР, то коефіцієнти першого рівняння перетворюємо за формулою:

$$a_{1j}' = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \qquad j = \overline{1,n}, \tag{2.8}$$

тобто коефіцієнти першого рівняння ділимо на головний елемент. Далі, використовуючи ***метод Гаусса***, проводимо необхідні перетворення (множимо чи ділимо всі елементи одного з рядків на певне числове значення; віднімаємо чи додаємо отримані значення до відповідних елементів іншого рядка тощо) так, щоб *звести нашу розширену матрицю до трикутного вигляду* (або говорять, *зводимо систему до такого вигляду, де нижче головної діагоналі розміщені нулі*). Це так званий ***прямий хід,*** результат якого можна подати у вигляді системи:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} \cdot x_2 + a_{13}^{(1)} \cdot x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)} \cdot x_n = b_1^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots x_2 + a_{23}^{(2)} \cdot x_3 + \ldots + a_{2n}^{(2)} \cdot x_n = b_2^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{nn}^{(k)} \cdot x_n = b_n^{(k)} \end{cases}, \tag{2.9}$$

де $a_{ij}^{(k)}, b_i^{(k)}$ – новоутворені коефіцієнти; k – номер кроку.

У результаті ***зворотного ходу*** послідовно, йдучи від останнього рівняння системи до першого, знаходимо значення невідомих $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$. Так, з останнього рівняння отримаємо:

$$x_n = \frac{b_n^{(k)}}{a_{nn}^{(k)}}.$$

Підставимо це значення в друге знизу рівняння і знайдемо $x_{n-1}$. Продовжуємо далі рухатись вгору, аж доки з першого рівняння системи не знайдемо значення $x_1$. Виконавши перевірку, одержимо відповідь.

Розв'язуючи ***методом Жордана-Гаусса,*** *виключення невідомих (перетворення на нуль) проводимо не лише під головною діагоналлю розширеної матриці, а й над нею.* Тоді СЛАР можна буде записати у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\qquad = b_1^{(k)} \\ \;.....x_2 \qquad\qquad = b_2^{(k)} \\ ..........x_3 \qquad\quad = b_3^{(k)} \\ .............................. \\ ....................x_n = b_n^{(k)} \end{cases} \qquad (2.10)$$

Тобто відразу отримаємо шукані значення невідомих – система розв'язана.

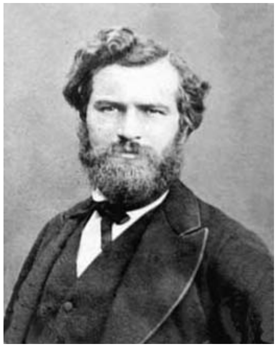
***<u>Зауваження.</u>*** При перетворенні СЛАР можливі такі випадки:

а) Якщо хоча б в одному з рівнянь перетвореної СЛАР зліва отримали нуль, а справа – відмінне від нуля число, то дана СЛАР не має розв'язків, адже на 0 ділити не можна. Наприклад:

$$0 \cdot x_n = 2 \qquad \to \qquad x_n = \frac{2}{0}.$$

б) Якщо хоча б в одному з рівнянь перетвореної СЛАР і зліва, і справа отримали нулі, то СЛАР має безліч розв'язків, адже рівність $0 \cdot x_n = 0$ виконується для будь-якого значення невідомої $x_n$.

## *СТОРІНКА ІСТОРІЇ*



***Каміль Жорда́н*** *(1838-1922) — французький математик, який став відомим завдяки своїм фундаментальним працям у теорії груп і курсі математичного аналізу. Народився в Ліоні, навчався в Політехнічній школі, де і отримав інженерну освіту. Пізніше – займає посаду викладача Політехнічної школи та Коледж де Франс.*

*Серед наукових досягнень – теорема Жордана про криву, топологічний результат (комплексний аналіз); Жорданова нормальна форма (лінійна алгебра); міра Жордана, що використовується для побудови інтеграла Рімана (математичний аналіз), теорема Жордана-Гьольдера про композиційний ряд (теорія груп).*

*Також займався теорією Галуа, досліджував групи Матьо тощо.*

*На честь ученого названі астероїд 25593 Камільжордан та Інститут Каміля Жордана (Франція).*

**Завдання 26.** Розв'яжіть систему $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3-2x_4=1 \\ x_1-2x_2-3x_3+x_4=2 \\ 3x_1+x_2-5x_3-x_4=0 \end{cases}$ методом Гаусса (за допомогою елементарних перетворень).

*Розв'язання*

Записуємо розширену матрицю даної системи: перші чотири стовпці – коефіцієнти біля невідомих даної матриці, четвертий – стовпець вільних членів:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки головний елемент першого рядка $a_{11} = 1 \neq 0$, то ми ділимо усі елементи даного рядка на 1, тобто записуємо його без змін на місце першого рядка другої розширеної матриці.

Щоб отримати матрицю трикутного вигляду (нижче головної діагоналі нулі), виконаємо ряд елементарних перетворень (***прямий хід***).

Спочатку перетворимо на нуль усі елементи (окрім $a_{11}$) першого стовпця. Для цього:

1) перший рядок помножимо на 2 і віднімемо його від другого:

$$\begin{array}{c} 1-й \\ 2-й \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Дані перетворення виконуємо усно. Лише результат операції віднімання

$$2-й \;-\; 1-й \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

записуємо на місце другого рядка другої розширеної матриці.

2) Від третього рядка віднімемо перший і запишемо результат на місце третього рядка другої розширеної матриці:

$$\begin{array}{cc} 1-й & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ 3-й & \\ \hline 3-й-1-й & \begin{pmatrix} 0 & -4 & -6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

3) Щоб отримати четвертий рядок другої матриці, від четвертого рядка першої віднімемо другий, а від результату віднімемо третій рядки першої матриці.

В результаті таких перетворень утворилася нова розширена матриця (друга), еквівалентна даній матриці (перша):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Щоб перетворити на нуль елементи другого стовпця, розміщені нижче головної діагоналі, у другій розширеній матриці залишаємо без змін перший рядок і перший стовпець.

Тобто усно виокремивши частину другої матриці, що містить елементи рядків

$$\begin{array}{l} 2-й \\ 3-й \\ 4-й \end{array} \begin{pmatrix} -1 & -5 & -4 & 1 \\ -4 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

виконаємо такі елементарні перетворення: елементи третього рядка поділимо на (-2), а четвертого – на (-3). Отримаємо третю розширену матрицю.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Щоб отримати нуль на місці елемента $a_{32} = 2$, проведемо такі перетворення: другий рядок третьої матриці помножимо на 2 і додамо до третього рядка – результат запишемо на місце третього рядка четвертої матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Помінявши місцями третій та четвертий стовпці даної матриці, матимемо нову, нижче головної діагоналі у якій елементи – нулі:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, можна переходити до ***зворотного ходу***. Для цього запишемо систему лінійних рівнянь у трикутному вигляді (пам'ятаючи про те, що третій та четвертий стовпці мінялися місцями):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 + 3x_3 = 0 \\ \quad - x_2 - 4x_4 - 5x_3 = 1 \\ \qquad - 8x_4 - 7x_3 = 1 \\ \qquad\qquad x_3 = 1 \end{cases}$$

Єдиним розв'язком даної системи будуть числа $x_3 = 1$, $x_4 = -1,\ x_2 = -2,\ x_1 = 2.$

Виконавши перевірку (підставивши отриманий результат замість невідомих у вихідну систему), переконуємось у правильності відповіді та можемо її записати.

**Відповідь:** $x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1.$

***<u>Зауваження.</u>*** Запропонований детальний опис процесу розв'язування (прямий хід) зазвичай записують у вигляді послідовності еквівалентних матриць:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рекомендуємо такий запис супроводжувати стислими коментарями щодо виконаних перетворень – це дозволить відслідкувати хід думок у процесі самоперевірки (за умови хибності отриманого результату).

## 5. Алгоритм розв'язання СЛАР методом Гаусса (з використанням розрахункових таблиць). Приклад розв'язання конкретної СЛАР методом Гаусса

Розв'язувати системи рівнянь методом Гаусса чи Жордана-Гаусса можна і за допомогою розрахункових таблиць. Проілюструємо даний метод на конкретному прикладі.

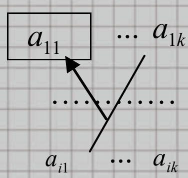
**Завдання 27.** Розв'яжіть систему $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ методом Гаусса за допомогою розрахункових таблиць.

*Розв'язання*

Використовуючи коефіцієнти біля невідомих та стовпчик вільних членів, тобто користуючись умовою завдання, заповнюємо нульовий крок ітерації (таблиця 6).

Якщо $a_{11} \neq 0$, то виберемо його за головний елемент (виділимо жирним шрифтом та візьмемо у прямокутник) і, користуючись формулою (2.8), поділимо на нього усі елементи *першого рядка*. Отриманий результат записуємо до першого кроку ітерацій на місце першого рядка.

Решту елементів таблиці перетворюємо за так званим "***правилом прямокутника***":




$$a_{ik}' = a_{ik} - \frac{a_{i1} \cdot a_{1k}}{a_{11}}, \qquad (2.11)$$

де $a_{ik}'$ – значення коефіцієнта, що перераховується (нове значення);

$a_{ik}$ – попереднє значення цього коефіцієнта.

"Прямокутник" з коефіцієнтів системи однозначно визначається головним елементом $a_{11}$ і коефіцієнтом $a_{ik}$, який перераховується. Причому дані елементи – не сусідні вершини "прямокутника". Якщо такий прямокутник скласти неможливо, то елемент таблиці перетворюється в нуль.

Таким чином, використовуючи "правило прямокутника" для заповнення першого кроку ітерацій ($k = 1$), отримаємо такі коефіцієнти.

*Другий рядок*:

$a_{21}{}' = 0$, бо неможливо утворити прямокутник так, щоб не сусідніми вершинами були головний елемент та елемент, який перераховується.

$$a_{22}{}' = a_{22} - \frac{a_{21} \cdot a_{12}}{a_{11}} = 3 - \frac{2 \cdot 2}{1} = -1;$$

$$a_{23}{}' = a_{23} - \frac{a_{21} \cdot a_{13}}{a_{11}} = 1 - \frac{2 \cdot 3}{1} = -5;$$

$$a_{24}{}' = a_{24} - \frac{a_{21} \cdot a_{14}}{a_{11}} = -2 - \frac{2 \cdot 1}{1} = -4;$$

$$b_2{}' = b_2 - \frac{a_{21} \cdot b_1}{a_{11}} = 1 - \frac{2 \cdot 0}{1} = 1.$$

*Третій рядок*: $a_{31}{}' = 0$;

$$a_{32}{}' = a_{32} - \frac{a_{31} \cdot a_{12}}{a_{11}} = -2 - \frac{1 \cdot 2}{1} = -4;$$

$$a_{33}{}' = a_{33} - \frac{a_{31} \cdot a_{13}}{a_{11}} = -3 - \frac{1 \cdot 3}{1} = -6;$$

$$a_{34}{}' = a_{34} - \frac{a_{31} \cdot a_{14}}{a_{11}} = 1 - \frac{1 \cdot 1}{1} = 0;$$

$$b_3{}' = b_3 - \frac{a_{31} \cdot b_1}{a_{11}} = 2 - \frac{1 \cdot 0}{1} = 2.$$

*Четвертий рядок*: $a_{41}{}' = 0$;

$$a_{42}{}' = a_{42} - \frac{a_{41} \cdot a_{12}}{a_{11}} = 1 - \frac{3 \cdot 2}{1} = -5;$$

$$a_{43}{}' = a_{43} - \frac{a_{41} \cdot a_{13}}{a_{11}} = -5 - \frac{3 \cdot 3}{1} = -14;$$

$$a_{44}{}' = a_{44} - \frac{a_{41} \cdot a_{14}}{a_{11}} = -1 - \frac{3 \cdot 1}{1} = -4;$$

$$b_4{}' = b_4 - \frac{a_{41} \cdot b_1}{a_{11}} = 0 - \frac{3 \cdot 0}{1} = 0.$$

Необхідно перетворити на нулі елементи $a_{32}$ та $a_{42}$ другого стовпця. Для цього виберемо головний елемент з ненульових коефіцієнтів другого рядка першого кроку ітерацій і поділимо на нього всі елементи цього рядка. Результат запишемо до другого кроку ($k = 2$) ітерацій на місце другого рядка. Решту коефіцієнтів перераховуємо за "правилом прямокутника", застосовуючи його до першого кроку.

Провівши аналогічні міркування та заповнивши таблицю коефіцієнтів для третього кроку ітерацій $(k = 3)$, отримаємо нулі нижче головної діагоналі.

***Зауваження.*** Коли обчислення ведуться з урахуванням лише заданого числа значущих цифр, отримуються великі похибки в результаті. Тому для контролю обчислень паралельно із розв'язком даної системи рівнянь часто розв'язують іншу систему, розв'язок якої на одиницю відрізняється від розв'язку даної СЛАР. В зв'язку з цим у наведеній таблиці розраховується ще і стовпчик $b_i + \sum a_{ij}$ та стовпчик контрольних сум, коефіцієнти якого розраховуються за "правилом прямокутника".

Після третього кроку прямого ходу методу Гаусса ($k = 3$) матриця *A* системи рівнянь набула трикутного вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1{,}14 \\ 0 & 0 & 0 & 3{,}43 \end{pmatrix}.$$

Таблиця 2.2

**Розрахункова таблиця методу Гаусса**
**для розв'язання завдання 27**

| Кроки ітерацій $k$ | Коефіцієнти біля невідомих | | | | Вільні члени |
|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | |
| 0 | $\boxed{\mathbf{1}}$ | 2 | 3 | 1 | 0 |
| | 2 | 3 | 1 | -2 | 1 |
| | 1 | -2 | -3 | 1 | 2 |
| | 3 | 1 | -5 | -1 | 0 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 0 |
| | 0 | $\boxed{\mathbf{-1}}$ | -5 | -4 | 1 |
| | 0 | -4 | -6 | 0 | 2 |
| | 0 | -5 | -14 | -4 | 0 |
| 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 0 |
| | 0 | 1 | 5 | 4 | -1 |
| | 0 | 0 | $\boxed{14}$ | 16 | -2 |
| | 0 | 0 | 11 | 16 | -5 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 0 |
| | 0 | 1 | 4 | 4 | -1 |
| | 0 | 0 | 1 | 1,14 | -0,14 |
| | 0 | 0 | 0 | 3,43 | -3,29 |

Для знаходження невідомих системи рівнянь проводимо зворотний хід і отримаємо, врахувавши можливу похибку, яка виникла при заокругленні, що $x_4 \approx -1, x_3 \approx 1, x_2 \approx -2, x_1 \approx 2$.

**У результаті вивчення теми студенти повинні:**

| *знати* | *вміти* |
|---|---|
| - формули Крамера;<br>- алгоритм розв’язання СЛАР матричним методом;<br>- алгоритм методу Гаусса для розв’язання СЛАР з використанням елементарних перетворень та розрахункових таблиць;<br>- алгоритм методу Жордана-Гаусса для розв’язання СЛАР | - розв’язувати СЛАР методом Крамера та матричним способом;<br>- розв’язувати складніші задачі матричної алгебри на дослідження та обґрунтовувати раціональність обраного способу розв’язання;<br>- використовувати визначники та матриці при розв’язанні задач економічного спрямування;<br>- розв’язувати СЛАР методами Гаусса та Жордана-Гаусса;<br>- будувати математичну модель запропонованої економічної ситуації, розв’язувати її методами Крамера, Гаусса, матричним способом і оцінювати реальність отриманих результатів. |

**Питання для самоконтролю**

1. Для розв’язування яких завдань використовують метод Крамера та в чому його суть?
2. За яких умов система лінійних алгебраїчних рівнянь має єдиний розв’язок?
3. Що можна сказати про систему рівнянь, якщо її визначник дорівнює нулю?
4. Запишіть формулу, за допомогою якої можна СЛАР розв’язати матричним способом.
5. Як скласти розширену матрицю довільної системи?
6. Яка схема розв’язування СЛАР методом Гаусса з використанням елементарних перетворень?
7. В чому полягає різниця між методами Гаусса та Жордана-Гаусса, які використовуються для відшукання розв’язку системи рівнянь?
8. Як використовувати розрахункові таблиці для розв’язання СЛАР методом Гаусса?

# ТЕМА 03. ВЕКТОРИ ТА ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ

***План***

1. *Прямокутна декартова система координат на площині та у просторі.*
2. *Дії над векторами.*
3. *Скалярний добуток двох векторів та його властивості.*
4. *Проекція вектора на вектор. Напрямні косинуси вектора.*
5. *Лінійні векторні простори та їх геометрична інтерпретація.*
6. *Лінійна залежність і незалежність векторів. Вимірність і базис векторного простору.*
7. *Векторний добуток двох векторів та мішаний добуток трьох векторів, їх властивості.*

*Основні терміни та поняття*: величини, скалярні величини, декартова система координат, вектор, компоненти (координати) вектора, векторний простір, двовимірний векторний простір, тривимірний векторний простір, операції над векторами (додавання, віднімання, множення на скаляр), модуль (довжина) вектора, координати вектора, орти, колінеарні та компланарні вектори, скалярний добуток двох векторів, проекція вектора, напрямні косинуси вектора, евклідова площина, лінійно залежні та лінійно незалежні вектори, лінійна комбінація, базис, векторний добуток, мішаний добуток.

## 1. Прямокутна декартова система координат на площині та у просторі

У повсякденному житті ми маємо справу з величинами, які задаються числом (наприклад, ціна товару, температура повітря, довжина відрізка) і визначаються певною одиницею: ціна – в гривнях, рублях, доларах; температура – в градусах; довжина – в кілометрах, метрах, сантиметрах; маса – в тоннах, центнерах, кілограмах тощо. Такі величини називаються ***скалярними***. Проте є величини, для характеристики яких недостатньо лише однієї скалярної величини. Це ***векторні*** величини або вектори. Наприклад, погода характеризується не лише температурою, а й відносною вологістю та тиском і без будь-якої з них характеристика погоди не є точною. Так само сила, прикладена до деякої точки, задається не лише значенням, а й напрямком (зверху вниз, зліва направо тощо). Якщо зобразити її графічно у декартовій системі координат на площині, то довжина відрізка буде відображати значення сили, стрілка – напрямок, в якому вона діє. Початок відрізка міститься у точці $A(x_1, y_1)$, а кінець – у точці $B(x_2, y_2)$ (Рис.3.1).

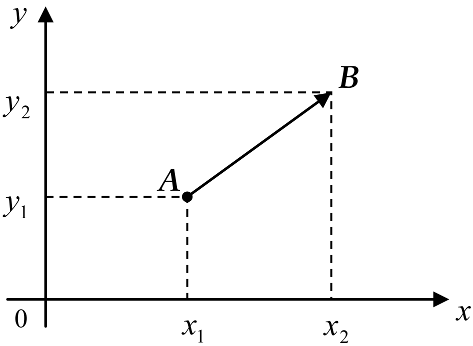



Рис. 3.1

***Означення. Координатами вектора** називають проекції радіус-вектора $\overline{AB}$ на осі координат.*

Норми витрат ресурсів на випуск одиниці продукції характеризуються кількістю одиниць відповідного ресурсу (сировини різних видів, устаткування, робочої сили, палива тощо). Крім того, вони виражаються в різних одиницях (кг, $м^2$, год. тощо). Отже, для характеристики норм витрат скалярних величин недостатньо.

***Означення. Вектором** називатимемо напрямлений відрізок $\overline{a}(\overline{AB})$ з початком у точці A і кінцем у точці B.*

***Означення. Вектором** називається величина, яка характерна числовим значенням та напрямом.*

Виберемо в просторі яку-небудь точку $O$, проведемо через неї три взаємно перпендикулярні осі і на кожній із них візьмемо одиничний вектор, напрямлений по цій осі. Вісь з обраним на ній початком відліку та одиницею довжини називається *координатною віссю*, а впорядкована система трьох взаємно перпендикулярних координатних осей із загальним початком відліку і загальною одиницею довжини називається *прямокутною декартовою системою координат у просторі*.

Якщо маємо на площині вектор $\overline{AB}$, де $A(x_1, y_1)$ – початкова і $B(x_2, y_2)$ – кінцева точки, то координати вектора $\overline{AB}$ будуть:

$$\overline{AB} = \overline{(x_2 - x_1, y_2 - y_1)}. \tag{3.1}$$

---

## *СТОРІНКА ІСТОРІЇ*

***Рене Декарт (1596 - 1650)*** *– більш відомий як великий філософ, ніж математик. Але саме він був піонером сучасної математики, його досягнення в цій галузі настільки видатні, що він по праву входить до числа великих математиків. Протягом 150 років математика розвивалася шляхами, прокладеними Декартом.*

*Про життя Декарта, знаного також під латинізованим ім'ям Картезія (звідси картезіанство), відомо небагато. Він народився у Франції, в невеличкому містечку Лае, у дворянській родині. Після закінчення коледжу почав вивчати правознавство. У 22 роки залишив Францію, служив у військах, які брали участь у війні.*

*У своєму філософському вченні розробив ідею про всемогутність розуму людини, тому й переслідувався католицькою церквою.*

*У 1637 р. Декарт видав великий філософський трактат "Міркування про метод. З додатками: Діоптрика, Метеори, Геометрія" (російською мовою був перекладений у 1953 р.), в якому систематизовано викладено метод прямолінійних координат, була введена зручна алгебраїчна символіка, яка збереглась до наших днів (наприклад, ним уведені знаки +, -,* $x^2, a, b, c...$ *– для констант та* $x, y, z...$ *– для змінних величин). Завдяки цій роботі, яка дуже вплинула на подальший розвиток математики, Декарта разом з його співвітчизником П. Ферма вважають основоположником аналітичної геометрії, а 1637 рік – роком її народження.*

Розглянемо вектор у прямокутній декартовій системі координат у просторі (рис. 3.2)

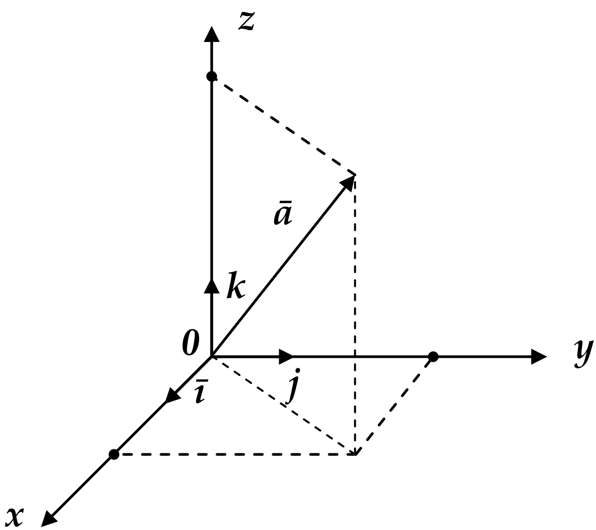



Рис. 3.2

В обраній впорядкованій системі координат перша вісь називається віссю абсцис (або віссю $x$), а напрямлений по ній вектор позначається символом $\bar{i}$, друга – віссю ординат (або віссю $y$) з напрямленим по ній вектором, що позначений символом $\bar{j}$, третя – віссю аплікат (або віссю $z$) і напрямленим вектором $\bar{k}$.

***Означення. Ортами** називають одиничні взаємно перпендикулярні вектори, які задають напрями осей координат та позначені символами* $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Нехай маємо вектор $\bar{a}(x, y, z)$, який за допомогою одиничних векторів можна записати:

$$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}. \tag{3.2}$$

***Означення. Модулем (довжиною) вектора*** *називають його числове значення* $|\overline{a}| = |\overline{AB}|$, *яке обчислюється за формулою:*

$$|\overline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \qquad (3.3)$$

Якщо при спостереженні від кінця третього вектора коротший поворот від першого до другого здійснюється проти годинникової стрілки, то маємо справу з *правою трійкою* векторів. Якщо при спостереженні від кінця третього вектора найкоротший поворот від першого вектора до другого здійснюється за годинниковою стрілкою, трійка векторів називається *лівою*.

Кількість величин, що утворюють вектор, характеризують його вимірність. Найпростішим є вектор з двома величинами. Записати вектор можна і у вигляді стовпчика, який залежно від вимірності матиме такий вигляд:

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}; \qquad \overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}; \qquad \overline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Кожне окреме число називають ***компонентою*** (або *координатою*) вектора, а сам вектор за кількістю компонентів – відповідно *двовимірним чи тривимірним* тощо. Кажуть, що задано $n$-вимірний вектор, де $n$ – кількість його координат.

Наприклад, в економічних розрахунках можна використовувати вектор-рядок вартості $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, компоненти якого – вартості різної сировини, палива, робочої людино-години, або вектор-стовпець потреб $D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ інших галузей до продукції трьох цехів. Іншими прикладами застосування векторів можуть бути:

- в деякому виробничому процесі є $n$ виробничих ресурсів, а кількість $i$-го ресурсу, що використовується за проміжок часу $t$, позначається $x_i$, тоді вектор $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – це виробничі ресурси;

- коли підприємство випускає $m$ різних виробів при кількості певного $j$-го виробу $y_j$, то випуск усіх виробів описує вектор $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$.

***Означення.*** *Два $n$-вимірні вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$* ***рівні між собою,*** *якщо всі їхні координати однакові:*

$$\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow a_i = b_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

***Означення. Нульовим вектором*** *є вектор, у якого початок збігається з кінцем. Позначається символом $\overline{0}$.*

Довжина нульового вектора дорівнює нулю, а напрямок довільний, тому нульовий вектор можна вважати колінеарним будь-якому іншому вектору.

***Означення.*** *Два вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називають* ***колінеарними,*** *якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.*

Якщо два вектори $\overline{a}(x_1, y_1, z_1)$ і $\overline{b}(x_2, y_2, z_2)$ колінеарні, то їх відповідні координати пропорційні:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} \quad \text{– умова колінеарності векторів.} \tag{3.4}$$

Для колінеарних векторів має місце така рівність:

$$\overline{b} = k \cdot \vec{a}, \tag{3.5}$$

де $k$ – коефіцієнт пропорційності.

***Означення. Компланарними*** *називають вектори, які лежать в одній площині або в паралельних площинах.*

## <u>2. Дії над векторами</u>

До лінійних операцій відносяться:

- додавання (віднімання ) векторів;
- множення вектора на число (скаляр).

**Додавання та віднімання двох векторів**

***Означення. Сумою двох векторів*** *$\overline{a}$ та $\overline{b}$ називається третій вектор $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$, початок якого є початком першого вектора ($\overline{a}$), кінець – кінцем другого вектора ($\overline{b}$), причому початок другого вектора ($\overline{b}$) зіставлений з кінцем першого ($\overline{a}$)* (рис. 3.3).

***<u>Зауваження.</u>*** Нульовий вектор нейтральний щодо дії додавання, оскільки він не міняє значення вектора-доданка.

Із даного означення випливає, що при додаванні векторів має місце <u>комутативна властивість</u>, тобто

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a} . \qquad (3.6)$$

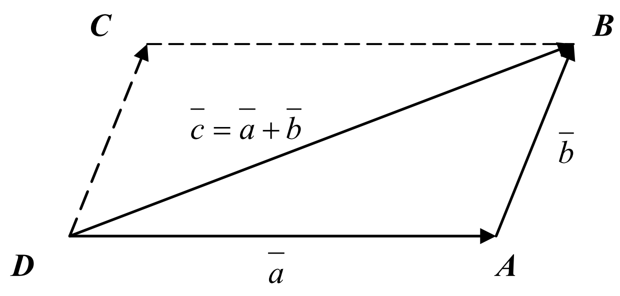



Рис. 3.3

Якщо доповнити трикутник, що складається з векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, до паралелограма, як показано на рисунку 3.3, то суму двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ можна визначити як діагональ паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$, які виходять із загального початку заданих векторів.

При додаванні векторів справедливою є і асоціативна властивість:

$$\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right), \tag{3.7}$$

Тоді суму трьох векторів можна записати у вигляді:

$$\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}. \tag{3.8}$$

Нехай два вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ задано координатами:

$$\overline{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \overline{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\overline{a}+\overline{b}=\begin{pmatrix} a_1 & + & b_1 \\ a_2 & + & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_n & + & b_n \end{pmatrix}; \quad \overline{a}-\overline{b}=\begin{pmatrix} a_1 & - & b_1 \\ a_2 & - & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_n & - & b_n \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

**Множення вектора на скаляр (число).**

***Означення. Добутком вектора*** $\overline{a}$ *на число* $\lambda$ *(або числа* $\lambda$ *на вектор* $\overline{a}$*) називається вектор* $\overline{b}$*, довжина якого в* $|\lambda|$ *разів більше довжини вектора* $\overline{a}$ *і напрямок збігається з напрямком вектора* $\overline{a}$*, якщо* $\lambda > 0$*, та протилежний напрямку* $\overline{a}$*, якщо* $\lambda < 0$.

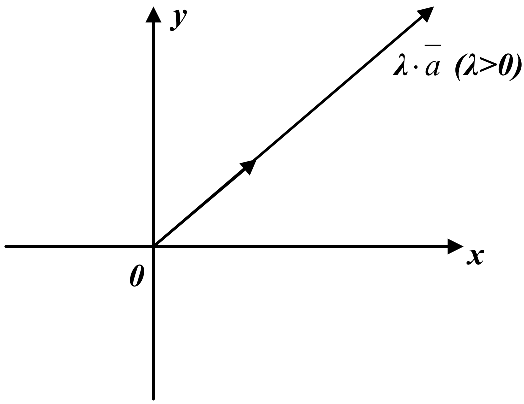



Рис. 3.4

Якщо координати вектора задані у вигляді стовпця, наприклад $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ і $\lambda$ – довільне число, то

$$\lambda \cdot \bar{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix}. \qquad (3.10)$$

Розглянемо множення вектора на скаляр, коли $\lambda = 0$. Тоді

$$0 \cdot \bar{a} = \begin{pmatrix} 0 \cdot & a_1 \\ 0 \cdot & a_2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 \cdot & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{0}.$$

Оскільки ділення на число $\lambda \neq 0$ це множення на число $\dfrac{1}{\lambda}$, то можна виконувати і *ділення вектора на відмінне від нуля число*.

При множенні вектора на число мають місце асоціативна властивість:

$$\lambda\left(\mu\overline{a}\right) = (\lambda\mu)\overline{a}\,; \tag{3.11}$$

та дистрибутивна властивість:

$$\lambda\left(\overline{a}+\overline{b}\right) = \lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}\,; \quad \text{або} \quad (\lambda+\mu)\overline{a} = \lambda\overline{a}+\mu\overline{a}\,. \tag{3.12}$$

Найпростішою задачею, що ілюструє операцію множення вектора на скаляр, може бути оцінювання норми ресурсів у різних валютах. Так, нехай на випуск одиниці продукції витрачаються три види ресурсів, ціни яких у гривнях відповідно дорівнюють:

$$\overline{p} = \begin{pmatrix} 150 \\ 1000 \\ 500 \end{pmatrix} \begin{array}{l} за \quad 1 \quad кг; \\ за \quad 1 \quad л; \\ за \quad 1 \quad м^2. \end{array}$$

Необхідно подати ціни цих ресурсів у євро і доларах США, якщо на цей час склалися такі співвідношення: 1 євро = 49,11 грн. і 1 долар = 42,3 грн. Для цього ціну кожного ресурсу множимо відповідно на $\lambda = \frac{1}{49{,}11}$ і $\mu = \frac{1}{42{,}3}$. Тоді

$$\bar{q}_1 = \begin{pmatrix} 3{,}05 \\ 20{,}36 \\ 10{,}18 \end{pmatrix} \begin{array}{l} євро \quad за \quad 1 \quad кг; \\ євро \quad за \quad 1 \quad л; \\ євро \quad за \quad 1 \quad м^2; \end{array} \quad \bar{q}_2 = \begin{pmatrix} 3{,}55 \\ 23{,}64 \\ 11{,}82 \end{pmatrix} \begin{array}{l} дол. \quad за \quad 1 \quad кг; \\ дол. \quad за \quad 1 \quad л; \\ дол. \quad за \quad 1 \quad м^2. \end{array}$$

## 3. Скалярний добуток двох векторів та його властивості

***Означення.*** ***Скалярним добутком*** *двох векторів* $\overline{a}$ *і* $\overline{b}$ *називають число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними,* тобто

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos(\overline{a} \wedge \overline{b}). \tag{3.13}$$

**Завдання 28.** Обчисліть скалярний добуток двох векторів, якщо $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 4$ і кут між векторами $60^0$.

*Розв'язання*

Оскільки $|\overline{a}| = 3, |\overline{b}| = 4$, то, користуючись формулою (3.13) для обчислення скалярного добутку, матимемо:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = 3 \cdot 4 \cdot \cos 60° = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6.$$

**Відповідь:** 6.

Для скалярного добутку справедливими є такі ***властивості***.

Комутативна властивість. Від перестановки множників скалярний добуток не змінюється:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}. \tag{3.14}$$

Асоціативна властивість. Сталий множник можна винести за знак скалярного добутку:

$$(\lambda \overline{a})\overline{b} = \overline{a}(\lambda \overline{b}) = \lambda(\overline{a}\overline{b}). \tag{3.15}$$

Розподільна властивість. Для будь-яких трьох векторів $\overline{a}$, $\overline{в}$, $\overline{c}$ має місце рівність:

$$\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\overline{c}=\overline{a}\overline{c}+\overline{b}\overline{c}\,. \qquad (3.16)$$

Розглянемо два взаємоперпендикулярні вектори $\overline{a}\left(x_1, y_1, z_1\right)$ та $\overline{b}\ \left(x_2, y_2, z_2\right)$. Враховуючи те, що кут між даними векторами $90^0$, а $\cos 90^0 = 0$, матимемо, що їх скалярний добуток дорівнює нулю. Справді, за формулою (3.13):

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos\left(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}\right)=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos 90^0 = 0\,.$$

Можна сформулювати ***умову перпендикулярності векторів:*** якщо вектори $\overline{a}$ і $\overline{в}$ перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю і навпаки, якщо скалярний добуток двох векторів дорівнює нулю, то ці вектори – перпендикулярні,

$$\text{якщо } \overline{a}\perp\overline{b}\text{, то } \overline{a}\overline{b}=0\,. \qquad (3.17)$$

Якщо ми маємо два вектори $\overline{a}\left(x_1, y_1, z_1\right)$ та $\overline{b}\ \left(x_2, y_2, z_2\right)$, що задані своїми координатами в ортонормованому базисі $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$

$$\overline{a}=x_1\overline{i}+y_1\overline{j}+z_1\overline{k} \qquad \text{та} \qquad \overline{b}=x_2\overline{i}+y_2\overline{j}+z_2\overline{k}\,,$$

то, використовуючи розподільну та сполучну властивості скалярного добутку, а також умову перпендикулярності векторів, матимемо ***формулу для обчислення скалярного добутку векторів, заданих координатами:***

$$\overline{a}\ \ \overline{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\,. \qquad (3.18)$$

***Зауваження.*** Формулу (3.18) читатимемо так: скалярний добуток двох векторів, що задані своїми координатами, дорівнює сумі добутків їх відповідних координат.

**Завдання 29.** Дослідіть знак скалярного добутку векторів $\overline{a}$ (3; -4; 0) та $\overline{b}$ (2; 3; -1 ).

*Розв'язання*

Оскільки умовою завдання вектори задані координатами, то, скориставшись формулою (3.18) для обчислення скалярного добутку, матимемо:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = 3 \cdot 2 + (-4) \cdot 3 + 0 \cdot (-1) = 6 - 12 + 0 = -6 .$$

**Відповідь:** скалярний добуток векторів від'ємний.

Використовуючи означення скалярного добутку (3.13), одержимо формулу для знаходження кута $\alpha$ між двома векторами $\overline{a}$ і $\overline{в}$:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}. \qquad (3.19)$$

**Завдання 30.** Вершини трикутника $ABC$ задано координатами: $A$(3;2;0), $B$(-1;2;1), $C$(0;3;1). Дослідіть можливість встановлення типу внутрішнього кута при вершині А без використання калькулятора чи довідника.

*Розв'язання*

Нагадаємо, що внутрішні кути трикутника можуть бути трьох типів: гострі, тупі та прямі. Кут при вершині А утворюється сторонами трикутника, які можна розглядати як вектори.

Обчислимо числове значення внутрішнього кута трикутника при вершині А. Для цього використаємо формулу (3.19):

$$\cos\angle BAC = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|}.$$

Проведемо попередні обчислення:

$\overline{AB} = \overline{(-4;0;1)}$, $\quad |\overline{AB}| = \sqrt{16+0+1} = \sqrt{17}$;

$\overline{AC} = \overline{(-3;1;1)}$, $\quad |\overline{AC}| = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$;

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 12 + 0 + 1 = 13.$$

Тоді

$$\cos \angle BAC = \frac{13}{\sqrt{17}\sqrt{11}}.$$

Оскільки $\angle BAC = \arccos \frac{13}{\sqrt{17}\sqrt{11}} \approx \arccos 0{,}95$, то встановити без допомоги калькулятора чи довідника, якому куту відповідає отримане числове значення.

**Відповідь:** тип внутрішнього кута при вершині А не можна визначити без калькулятора чи довідника.

В економіці скалярний добуток використовується при визначенні ціни набору товарів. Нагадаємо, що ***товар*** – деяка продукція або послуга, яка надходить на ринок для продажу в певний час і в певному місці.

Нехай маємо $n$ різних товарів. Обсяг $i$-го товару позначимо через $x_i$, $i = 1,2,...,n$. Тоді деякий набір цих товарів можна записати у вигляді вектора $\overline{x} = (x_1, \ x_2, \ ..., \ x_n)$, тобто $\overline{x}$ є $n$-вимірним вектором. Множину всіх наборів товарів називають ***простором товарів С***. Ця множина є простором тому, що в ній можна додавати два довільних набори та множити будь-який набір товарів на довільне невід'ємне число.

***<u>Зауваження.</u>*** З економічних міркувань розглядатимемо лише такі набори товарів, у яких компоненти $x_i \geq 0$ для довільного значення $i$.

Кожен товар має певну ***ціну***. Всі ціни строго додатні. Нехай ціна $i$-го товару становить $p_i$, $i = 1,2,...,n$. Тоді вектор $\overline{p} = (p_1, \quad p_2, \quad ..., \quad p_n)$ називають ***вектором цін***.

Для набору товарів $\overline{x} = (x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n)$ розглянемо вектор відповідних цін $\overline{p} = (p_1, \quad p_2, \quad ..., \quad p_n)$.

***Означення. Ціною набору товарів*** *є число* $c(\overline{x})$, *яке чисельно дорівнює скалярному добутку вектора набору товару та вектора цін, тобто*

$$c(\overline{x}) = \overline{p} \cdot \overline{x} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n .$$

**Завдання 31**. Витрати фірми на ресурси, які використовуються для виготовлення одиниці продукції, задано в таблиці:

| **Ресурси (** $x_i$ **)** | **Кількість** | **Ціна (** $p_i$ **)** |
|---|---|---|
| Сировина першого виду **(** $x_1$ **)** | 200 *кг* | 3 *грн./кг* |
| Сировина другого виду **(** $x_2$ **)** | 500 $м^2$ | 5 *грн./* $м^2$ |
| Витрати праці **(** $x_3$ **)** | 0,65 людино-год. | 10 грн./людино-год. |
| Обладнання **(** $x_4$ **)** | 0,7 машино-год. | 15 грн./машино-год. |

Дослідити величину ціни всіх ресурсів, що використовуються фірмою для виготовлення одиниці продукції.

*Розв'язання*

Введемо вектор витрат ресурсів на одиницю продукції

$$\overline{x} = (200; \quad 500; \quad 0,65; \quad 0,7)$$

та вектор цін одиниць відповідних ресурсів

$$\overline{p} = (3; \quad 5; \quad 10; \quad 15).$$

Вартість усіх ресурсів, що використовуються для виготовлення одиниці продукції, обчислимо як скалярний добуток двох даних векторів. Тобто

$$c(\overline{x}) = \overline{p} \cdot \overline{x} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4 .$$

Тоді:

$$c(\overline{x}) = \overline{p} \cdot \overline{x} = 200 \cdot 3 + 500 \cdot 5 + 0{,}65 \cdot 10 + 0{,}7 \cdot 15 = 3117 \text{ грн.}$$

**Відповідь:** ціна ресурсів, що витрачаються на виготовлення одиниці продукції, становить 3117 грн.

## 4. Проекція вектора на вектор. Напрямні косинуси вектора

Розглянемо два вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$, які перетинаються під кутом $\varphi$ (рис. 3.5).

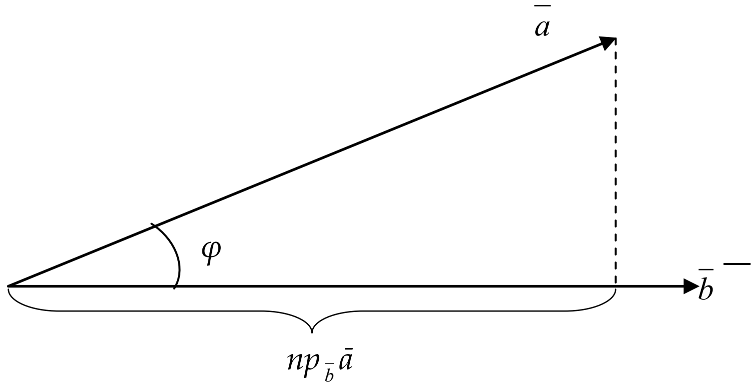



Рис. 3.5

З кінця вектора $\overline{a}$ опустимо перпендикуляр на вектор $\overline{b}$. Отримаємо прямокутний трикутник, прилеглим катетом якого є проекція вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ (позначимо $np_{\bar{b}}\overline{a}$). Використовуючи означення косинуса кута прямокутного трикутника, матимемо $\cos\varphi = \dfrac{np_{\bar{b}}\overline{a}}{|\overline{a}|}$, звідки випливає, що

$$np_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}|\cos\varphi .$$

За формулою (3.19):

$$np_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi = |\bar{a}| \cdot \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} .$$

Опустивши перпендикуляр з кінця вектора $\bar{b}$ на вектор $\bar{a}$, отримаємо аналогічну формулу. Отже,

$$np_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}, \qquad np_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|} . \qquad (3.20)$$

**Завдання 32.** Знайдіть проекцію вектора $\bar{a}$ (3; 0; -3 ) на вектор $\bar{b}$ (3; 0; -4 ).

*Розв'язання*

Побудуємо малюнок (рис. 3.5). За формулою (3.20) для знаходження проекції вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ матимемо:

$$np_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{9+0+12}{\sqrt{9+16}} = \frac{21}{\sqrt{25}} = \frac{21}{5} = 4{,}2 .$$

**Відповідь:** 4,2.

***Означення. Напрямними кутами*** *$\alpha, \beta, \gamma$ вектора $\bar{a}$ називають кути, які утворює даний вектор з осями координат* (рис. 3.6).

***Означення. Напрямними косинусами*** *називають величини, які обчислюють за формулами:*

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\bar{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{y}{|\bar{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\bar{a}|}, \qquad (3.21)$$

*де x, y, z – координати вектора* $\bar{a}$ .

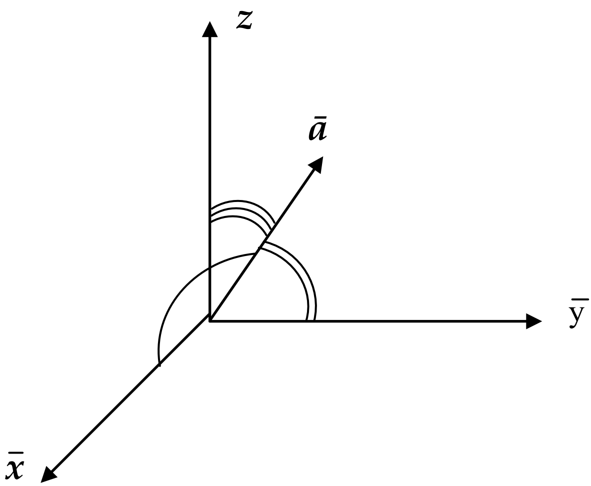



Рис. 3.6

*Напрямні косинуси* вектора *володіють* такою *властивістю*:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (3.22)$$

**Завдання 33.** Знайдіть значення напрямних косинусів вектора $\bar{a}$ (2; 1; -4 ).

*Розв'язання*

За формулами (3.21) для обчислення напрямних косинусів вектора маємо:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{4+1+16}} = \frac{2}{\sqrt{21}}; \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{21}}; \quad \cos\gamma = \frac{-4}{\sqrt{21}}.$$

**Відповідь:** $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{21}}; \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{21}}; \cos\gamma = -\frac{4}{\sqrt{21}}.$

## 5. Лінійні векторні простори та їх геометрична інтерпретація

Операції множення вектора на скаляр та додавання векторів дають змогу ввести поняття ***векторного простору***, який позначається V.

Для елементів цього простору справедливими є ***такі аксіоми***.

1. Якщо $\overline{a}, \overline{b} \in V$ і $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$, то $\overline{c} \in V$. (3.23)
2. Комутативність дії додавання:
$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}\,; \overline{a}, \overline{b} \in V. \qquad (3.24)$$
3. Асоціативність додавання:
$$\left(\overline{a} + \overline{b}\right) + \overline{c} = \overline{a} + \left(\overline{b} + \overline{c}\right);\ \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V. \qquad (3.25)$$
4. Існування нульового вектора, такого, що:
$$\overline{a} + 0 = \overline{a}, \overline{a} \in V. \qquad (3.26)$$
5. Існування протилежного вектора:
$$\overline{a} + (-\overline{a}) = 0, a \in V. \qquad (3.27)$$
6. Якщо $\overline{a} \in V$ і $\lambda \in R$, то $\lambda\overline{a} \in V$. (3.28)
7. Дистрибутивність множення:
$$\lambda, \mu \in R \text{ і } \overline{a} \in V \Rightarrow (\lambda + \mu)\overline{a} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{a}\,, \qquad (3.29)$$
$$\lambda\left(\overline{a} + \overline{b}\right) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}\,. \qquad (3.30)$$
8. Асоціативність множення:
$$\text{якщо } \lambda, \mu \in R, \text{ то } (\lambda\mu)\overline{a} = \lambda(\mu\overline{a}), \overline{a} \in V. \qquad (3.31)$$
9. Існування одиниці:
$$1\overline{a} = \overline{a}, \overline{a} \in V. \qquad (3.32)$$

З аксіом випливає, що векторний простір є лінійним, тобто для довільних скалярних дійсних величин $\lambda$ та $\mu$ вектор $\lambda\overline{a} + \mu\overline{b} \in V$, якщо $\overline{a}$ і $\overline{b} \in V$.

**Завдання 34.** Користуючись правилами виконання дій над векторами, знайдіть

$$\overline{a}+\overline{b}, \quad \left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}, \quad \overline{a}+0, \quad -\overline{a}, \quad (\lambda+\mu)\overline{a}, \quad \lambda\overline{a}+\mu\overline{b},$$

якщо

$$\overline{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \quad \overline{b}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}, \quad \overline{c}=\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}, \quad \lambda=\frac{1}{2},$$

$$\mu=5.$$

*Розв'язання*

Використовуючи формули (3.9) та аксіоми (3.24) – (3.31), матимемо:

$$\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}=\overline{b}+\overline{a}; \quad \left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\\0\end{pmatrix}=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right);$$

$$\overline{b}+0=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}; \qquad -\overline{a}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix};$$

$$(\lambda+\mu)\overline{a}=\left(\frac{1}{2}+5\right)\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{11}{2}\\\frac{11}{2}\\11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5{,}5\\5{,}5\\11\end{pmatrix}; \quad \lambda\overline{a}+\mu\overline{b}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{21}{2}\\\frac{21}{2}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10{,}5\\10{,}5\\1\end{pmatrix}.$$

**Відповідь:** $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$; $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\begin{pmatrix}6\\3\\0\end{pmatrix}$; $\overline{b}+0=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$;

$$-\overline{a}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}; (\lambda+\mu)\overline{a}=\begin{pmatrix}5{,}5\\5{,}5\\11\end{pmatrix}; \ \lambda\overline{a}+\mu\overline{b}=\begin{pmatrix}10{,}5\\10{,}5\\1\end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що під символами $x, y, \ldots$ можна розуміти не тільки вектори, а й елементи іншої природи, які задовольняють аксіоми (3.23) – (3.32). Тоді відповідну сукупність елементів називають ***лінійним простором***.

Навіть найпростіші лінійні статистичні економічні моделі описуються з використанням векторів.

Для дослідження динамічних (рухомих) моделей різних процесів стан економічної системи, що вивчається, в момент часу $t$ описується за допомогою вектора $X$ із $n$-вимірного простору, а керування процесом у той самий момент часу описується за допомогою вектора $\overline{U(t)}$ із $m$-вимірного простору. Таким чином, в динамічних моделях використовуються вектори $n$- та $m$- вимірних просторів, координати яких залежать від часу $t$.

Для геометричної інтерпретації векторів використовуємо евклідову площину $R^2$. Двовимірний вектор $\overline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ можна зобразити променем, який виходить із початку координат, і компонентами, що характеризують координати кінця вектора (рис. 3.7).

Крім того, компоненти $a_1$ та $a_2$ можна вважати проекціями вектора $\overline{a}$ на відповідні осі $0x_1$ й $0x_2$. Використовуючи тригонометричні функції кута $\cos\varphi$ і $\sin\varphi$, знаходимо $a_1 = np_{0x_1}\overline{a} = |\overline{a}|\cos\varphi$; $a_2 = np_{0x_2}\overline{a} = |\overline{a}|\sin\varphi$, де через $|\overline{a}|$ позначено довжину вектора $\overline{a}$.

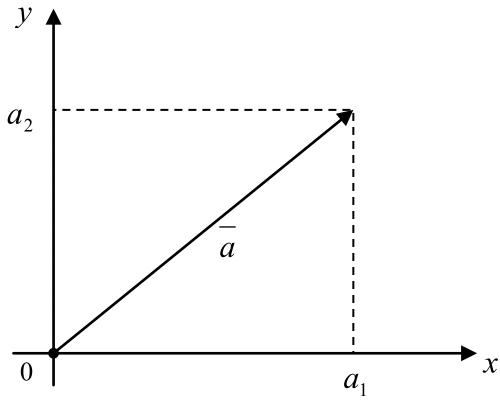



Рис. 3.7

Виходячи з інтерпретації вектора, протилежний вектор, вектор, помножений на скаляр $\lambda$, суму двох векторів можна зобразити так, як показано на рисунках 3.8.

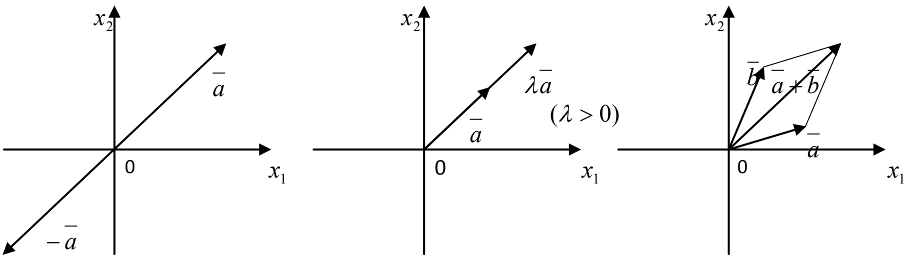



Рис. 3.8

Евклідова площина $R^2$, очевидно, буде двовимірним векторним простором, оскільки для неї виконуються всі аксіоми (3.23) – (3.32), що легко перевіряються.

Для векторного простору $R^2$ є два одиничні вектори (орти):

$$\overline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \overline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Враховуючи, що довільний вектор у даному векторному просторі задається двома координатами $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, маємо:

$$\overline{a} = a_1\overline{e}_1 + a_2\overline{e}_2. \tag{3.33}$$

Таке подання довільного вектора з векторного простору легко переноситься на довільну вимірність евклідового простору $R^n$.

Нехай $\overline{a} \in R^n$, тоді

$$\overline{a} = a_1\overline{e}_1 + a_2\overline{e}_2 + \ldots + a_n\overline{e}_n, \tag{3.34}$$

де $\overline{e}_j$ – одиничний вектор-орт, в якому $i$-та компонента дорівнює одиниці, а решта – нулі.

## 6. Лінійна залежність і незалежність векторів. Вимірність і базис векторного простору

Введемо дуже важливі для векторних просторів поняття лінійної залежності та незалежності векторів.

Нехай задано вектори $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n \in V$.

***Означення.*** *Система векторів $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ називається* ***лінійно залежною****, якщо хоча б один із них може бути виражений як лінійна комбінація інших, тобто якщо існують числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, із яких хоч одне відмінне від нуля, такі, що*

$$\lambda_1 \cdot \overline{a_1} + \lambda_2 \cdot \overline{a_2} + ... + \lambda_n \cdot \overline{a_n} = 0. \qquad (3.35)$$

В протилежному випадку система векторів є ***лінійно незалежною***. Можна сформулювати ще таке:

***Означення.*** *Система векторів називається* ***лінійно незалежною****, якщо жоден із векторів цієї системи не може бути поданий як лінійна комбінація інших.*

Тобто рівність (3.35) виконується лише при $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$.

*Наприклад*, вектор $\overline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ є лінійною комбінацією векторів

$\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ та $\overline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, оскільки $\overline{b} = 2\overline{a}_1 + 4\overline{a}_2$.

Із формули $\overline{b} = a_1\overline{e}_1 + a_2\overline{e}_2 + \ldots + a_n\overline{e}_n$ випливає, що вектори $\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n$ лінійно незалежні, тому що рівність

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{e}_i = 0 \tag{3.36}$$

виконується тільки при $\lambda_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$. Такі вектори будемо називати ***базисними.*** Якщо їх кількість дорівнює вимірності векторного простору $V$, то вони утворюють його базис.

***Означення.*** *Впорядкована трійка (якщо вказано, який вектор трійки вважати першим, який другим і який третім) некомпланарних векторів називається* ***базисною системою векторів (базисом)*** *у просторі.*

Наприклад, базисною трійкою є взаємно перпендикулярні вектори $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$. Тоді базисна система називається *ортогональною*. Крім того, довжини усіх трьох векторів дорівнюють одиниці. Така система векторів називається *нормованою* (в багатьох випадках довжину вектора називають *нормою*). Отже, обрана система базисних векторів – координатний базис – є ортогональною і нормованою, або, як часто говорять, *ортонормованою*.

Вектори $\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_n$ утворюють базис векторного простору $V$, якщо довільний вектор із цього простору можна зобразити їх лінійною комбінацією.

Максимальна кількість лінійно незалежних векторів простору $V$ називається ***вимірністю простору*** і позначається так:

$$\dim\ V = n. \tag{3.37}$$

Із цього означення випливає, що $\dim R^1 = 1$, $\dim R^2 = 2$, $\dim R^3 = 3$, …, $\dim R^n = n$.

***Теорема 1.*** Базис простору складається з максимальної кількості лінійно незалежних векторів.

**Завдання 35.** Дослідіть, чи утворюють вектори $\overline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ базис у просторі $R^3$?

*Розв'язання*

Для того, щоб вектори утворювали базис, вони повинні бути лінійно незалежними. Перевіримо виконання умови (3.35) для трьох векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$: $\lambda_1 \cdot \overline{a} + \lambda_2 \cdot \overline{b} + \lambda_3 \cdot \overline{c} = 0$.

Тобто

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Перейдемо до системи, виконуючи лінійні операції над векторами. Отримаємо:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язавши дану систему одним із відомих нам методів (метод Крамера, Гаусса, Жордана-Гаусса, матричний спосіб тощо), отримаємо розв'язок: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$.

**Відповідь:** вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ є лінійно незалежними і утворюють базис у просторі $R^3$.

## 7. Векторний добуток двох векторів та мішаний добуток трьох векторів, їх властивості

***Означення.*** ***Векторним добутком*** *двох векторів* $\overline{a}$ *і* $\overline{b}$ *називають такий вектор* $\overline{c}$, *який позначається* $c = \left[\overline{a}, \overline{b}\right] = \overline{a} \times \overline{b} = \left[\overline{a} \times \overline{b}\right]$ *і задовольняє умови:*

*1)* $\overline{c} \perp \overline{a}$ *і* $\overline{c} \perp \overline{b}$;

*2)* $\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \sin\varphi$, *де* $\varphi$ *– кут між векторами*; (3.38)

*3)* $\overline{c}$ *направлений так, що з кінця цього вектора поворот від* $\overline{a}$ *до* $\overline{b}$ *видно проти годинникової стрілки.*

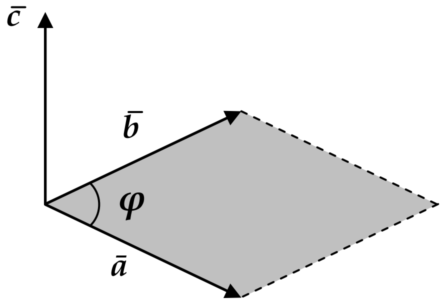



Рис. 3.9

Довжина вектора $\overline{c}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$ як на сторонах.

**Завдання 36.** Обчисліть значення векторного добутку двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо їх довжини відповідно дорівнюють 2 та 4, а кут $\varphi$ між векторами становить $30^0$.

*Розв'язання*

Використовуючи означення векторного добутку, матимемо:

$$\left[\overline{a}, \overline{b}\right] = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \sin\varphi = 2 \cdot 4 \cdot \sin 30° = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4 .$$

**Відповідь:** 4.

***<u>Властивості векторного добутку</u>.***

**1)** При перестановці множників векторний добуток змінює знак на протилежний (переставна властивість):

$$\left[\overline{a},\overline{b}\right]=-\left[\overline{b},\overline{a}\right]. \qquad (3.39)$$

**2)** Сталий множник можна винести за знак векторного добутку (сполучна властивість):

$$\left[\lambda\overline{a},\overline{b}\right]=\left[\overline{a},\lambda\overline{b}\right]=\lambda\left[\overline{a},\overline{b}\right]. \qquad (3.40)$$

**3)** Для будь-яких трьох векторів $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ має місце рівність (розподільна властивість):

$$\left[\overline{a}+\overline{b},\overline{c}\right]=\left[\overline{a},\overline{c}\right]+\left[\overline{b},\overline{c}\right]. \qquad (3.41)$$

**4)** Якщо два вектори $\overline{a}$ і $\overline{в}$ колінеарні ($\overline{a}\,\|\,\overline{b}$), то їх векторний добуток дорівнює нулю, тобто

якщо $\overline{a}$ II $\overline{b}$, то $\left[\overline{a},\overline{b}\right]=0$. $\qquad$ (3.42)

Це ***умова колінеарності векторів.***

***<u>Зауваження.</u>*** Враховуючи умову колінеарності, можна стверджувати, що

$$\left[\overline{a},\overline{a}\right]=0. \qquad (3.43)$$

Оскільки вектори $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$ взаємно перпендикулярні, мають одиничні довжини і утворюють праву трійку, то

$\left[\overline{i},\overline{i}\right]=0$; $\quad\left[\overline{i},\overline{j}\right]=\overline{k}$; $\quad\left[\overline{i},\overline{k}\right]=-\overline{j}$;

$\left[\overline{j},\overline{i}\right]=-\overline{k}$; $\quad\left[\overline{j},\overline{j}\right]=0$; $\quad\left[\overline{j},\overline{k}\right]=\overline{i}$;

$\left[\overline{k},\overline{i}\right]=\overline{j}$; $\quad\left[\overline{k},\overline{j}\right]=-\overline{i}$; $\quad\left[\overline{k},\overline{k}\right]=0$.

Якщо розглянути два вектори $\overline{a}\left(x_1,y_1,z_1\right)$ та $\overline{b}\left(x_2,y_2,z_2\right)$, що задані своїми координатами в ортонормованому базисі $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$

$$\overline{a} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k} \qquad \text{та} \qquad \overline{b} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}\,,$$

то, використовуючи розподільну і сполучну по відношенню до скалярного множника властивості векторного добутку, дістанемо ***формулу для обчислення векторного добутку векторів, заданих розкладом за ортонормованим базисом***:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \left(x_2 y_3 - x_3 y_2\right)\cdot \overline{i} + \left(x_3 y_1 - x_1 y_3\right)\cdot \overline{j} + \left(x_1 y_2 - x_2 y_1\right)\cdot \overline{k}\,. \quad (3.44)$$

На практиці частіше використовується ще одна формула ***для обчислення векторного добутку векторів*** $\overline{a}\left(x_1, y_1, z_1\right)$, $\overline{b}\left(x_2, y_2, z_2\right)$, ***що задані координатами*** :

$$\left[\overline{a}, \overline{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \quad (3.45)$$

**Завдання 37**. Дослідіть, які координати матиме векторний добуток векторів $\overline{a}$ (0; -2; 3) та $\overline{в}$ (2; 1; 1).

*Розв'язання*

Скористаємось формулою (3.45) для запису векторного добутку векторів, що задані координатами:

$$\left[\overline{a}, \overline{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Для обчислення визначника третього порядку застосуємо теорему розкладу. У нашому випадку найдоцільніше розкласти визначник за елементами першого рядка:

$$\left[\overline{a}, \overline{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{j}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}\cdot$$

**Відповідь**: $\left[\overline{a}, \overline{b}\right] = \overline{(-5;-6;4)}$.

Вектори часто використовуються для розв'язування геометричних задач. При цьому: переходять до формулювання умови задачі «мовою векторів» – позначають деякі відрізки як вектори та складають векторні рівності; перетворюють задані векторні рівності, користуючись властивостями дій над векторами та відомими векторними рівностями; "перекладають" отриманий результат на мову геометрії.

Зокрема важливою геометричною задачею, яка розв'язується за допомогою векторного добутку, є ***обчислення площі трикутника, координати вершин якого задані***, адже, враховуючи означення векторного добутку, *площа трикутника* $ABC$ (рис. 3.10), *побудованого на векторах* $\overline{AB}$ *і* $\overline{AC}$, *дорівнює половині площі паралелограма, а отже – половині модуля векторного добутку*:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\left[\overline{a}, \vec{в}\right]\right| \quad \text{або} \quad S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overline{AB}, \overline{AC}\right]\right| \qquad (3.46)$$

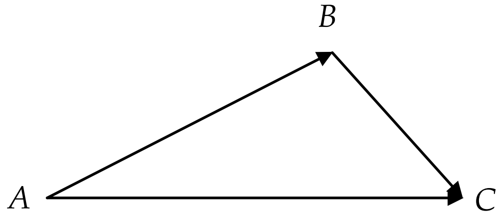



Рис. 3.10

**Завдання 38.** Обчисліть площу трикутника $ABC$, вершини якого знаходяться в точках:

A(0; -2; 4), B (3; 2; 1), C (0; -1; 2).

*Розв'язання*

Скористаємось для розв'язування трикутником, що зображений на мал. 26. Позначимо дві сторони даного трикутника через вектори та знайдемо їх координати:

$\overline{AB}$ (3; 4; -3), $\overline{AC}$ (0; 1; -2).

За формулою (3.45) обчислимо їх векторний добуток:

$$\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 4 & -3\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}4 & -3\\ 1 & -2\end{vmatrix}+\vec{j}\begin{vmatrix}3 & -3\\ 0 & -2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}3 & 4\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-5\vec{i}-6\vec{j}+3\vec{k}=\overline{(-5;-6;3)}.$$

Тоді, площу трикутника, що вимірюється квадратними одиницями отримаємо, використавши формулу (3.46):

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left\|\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{25+36+9}=\frac{1}{2}\sqrt{70}(кв.од)$$

**Відповідь:** $\frac{1}{2}\sqrt{70}(кв.од)$.

***Означення. Мішаним добутком трьох векторів*** $(\overline{a},\overline{в},\overline{c})=\left(\overline{a}\left[\overline{b}\times\overline{c}\right]\right)$ *називається скалярний добуток вектора* $\overline{a}$ *на векторний добуток векторів* $\overline{в}$ *і* $\overline{c}$.

З геометричної точки зору мішаний добуток трьох векторів дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, якщо вони утворюють праву трійку, і дорівнює об’єму паралелепіпеда, взятому із знаком "мінус", якщо вектори утворюють ліву трійку.

**Властивості мішаного добутку**.

1. Від циклічної перестановки векторів мішаний добуток не змінюється (переставна властивість):

$$\left(\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right)=\left(\overline{b}\overline{c}\overline{a}\right)=\left(\overline{c}\overline{a}\overline{b}\right). \qquad (3.47)$$

2. Якщо у мішаному добутку переставити місцями два сусідні вектори, то мішаний добуток змінить знак на протилежний :

$$\left(\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right)=-\left(\overline{b}\overline{a}\overline{c}\right)=-\left(\overline{a}\overline{c}\overline{b}\right). \qquad (3.48)$$

3. Якщо вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ компланарні, то їх мішаний добуток дорівнює нулю, тобто

$$\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\right)=0 \qquad (3.49)$$

і навпаки, якщо мішаний добуток трьох векторів дорівнює нулю, то вони обов’язково компланарні. Це ***умова компланарності векторів.***

Якщо вектори задані своїми координатами в ортонормованому базисі $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, то мішаний добуток обчислюється за допомогою формули:

$$\bar{a}\left[\bar{b} \times \bar{c}\right] = x_1\left(y_2 z_3 - y_3 z_2\right) + x_2\left(y_3 z_1 - y_1 z_3\right) + x_3\left(y_1 z_2 - y_2 z_1\right). \quad (3.50)$$

Проте на практиці при обчисленні мішаного добутку зручніше користуватися визначником.

***Правило.*** Якщо вектори $\bar{a}, \bar{в}, \bar{c}$ задані своїми координатами, тобто $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$, $\bar{c}(x_3, y_3, z_3)$, то мішаний добуток трьох векторів обчислюється за формулою:

$$\left(\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (3.51)$$

**Завдання 39.** Обчисліть значення мішаного добутку $\left(\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right)$ трьох векторів, якщо $\bar{a}(3;-1;0)$, $\bar{b}$ (2; 1; -1 ), $\bar{c}$ (-1; 0; 2 ).

*Розв'язання*

Скористаємось правилом обчислення мішаного добутку векторів, що задані координатами (3.51):

$$\left(\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 + 4 = 9.$$

**Відповідь:** 9.

Мішаний добуток трьох векторів застосовується в геометрії для обчислення об’єму паралелепіпеда, лінійними вимірами якого є дані вектори, та трикутної піраміди, побудованої на цих векторах (рис. 3.11).

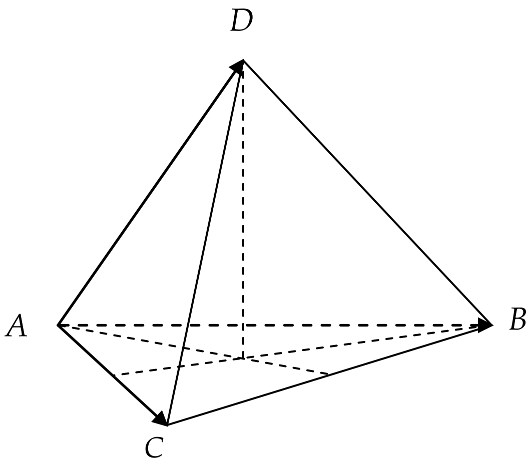



Рис. 3.11

| ***Формула для обчислення об’єму*** | |
|---|---|
| паралелепіпеда | піраміди |
| $V_{пар.} = \left\|(\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c})\right\|$ або (3.52) $V_{пар.} = \left\|\left(\overline{AB}\cdot\ \overline{AD}\cdot\ \overline{AC}\right)\right\|$ | $V_{пар.} = \dfrac{1}{6}\left\|(\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c})\right\|$ або (3.53) $V_{пар.} = \dfrac{1}{6}\left\|\left(\overline{AB}\cdot\ \overline{AD}\cdot\ \overline{AC}\right)\right\|$ |

***<u>Зауваження.</u>*** Об’єм вимірюється кубічними одиницями.

**Завдання 40.** Піраміда задана вершинами А (3; -1; 0), В (0; 2; 2), С (2; 1; 1), Д (0; 1;-1). Знайдіть її об’єм.

*Розв’язання*

Скористаємось мал. 27. Спочатку обчислимо координати векторів, що утворюють мішаний добуток:

$$\overline{AB} = \overline{(-3;3;2)},\ \overline{AC} = \overline{(-1;2;1)},\ \overline{AD} = \overline{(-3;2;-1)}.$$

Тоді, за формулою (3.51):

$$\left(\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\right) = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 6-9-4+12+6-3 = 8.$$

Використавши формулу (3.53), обчислимо об’єм піраміди в кубічних одиницях:

$$V_{пір.} = \frac{1}{6}\cdot|8| = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} \quad \text{куб. од.}$$

**Відповідь:** 8 куб.од.

**У результаті вивчення теми студенти повинні:**

| *знати* | *вміти* |
|---|---|
| - поняття декартової системи координат;<br>- поняття вектора та векторного простору;<br>- означення скалярного, векторного та мішаного добутків векторів;<br>- поняття проекції вектора та напрямних косинусів вектора. | - виконувати дії над векторами, заданими координатами;<br>- знаходити скалярний, векторний та мішаний добутки векторів і використовувати їх для розв’язування задач;<br>- знаходити довжину вектора та кут між векторами;<br>- застосовувати векторний метод при розв’язанні економічних задач, завдань на доведення, дослідження. |

**Питання для самоконтролю**

1. Що називається довжиною вектора?
2. Які вектори називаються ортами?
3. Запишіть формулу для обчислення довжини вектора.
4. Які вектори називаються колінеарними? Запишіть умову колінеарності векторів.
5. Які вектори називаються компланарними?
6. Сформулюйте означення скалярного добутку векторів та подайте його аналітично.
7. Перерахуйте основні властивості скалярного добутку.
8. Якщо вектори задані координатами, то який вигляд має формула для обчислення скалярного добутку?
9. Як знайти кут між двома векторами?
10. Запишіть формулу для знаходження проекції вектора на вектор.
11. Які кути називаються напрямними кутами?
12. Дайте означення і запишіть формули напрямних косинусів вектора.
13. Сформулюйте означення векторного добутку двох векторів.
14. Перелічіть основні властивості векторного добутку.
15. Запишіть умову колінеарності векторів.
16. Якщо вектори задані координатами, то як знайти їх векторний добуток?
17. Сформулюйте означення мішаного добутку трьох векторів.
18. Користуючись мішаним добутком, як можна обчислити об'єм паралелепіпеда та піраміди?
19. Які основні властивості мішаного добутку? Запишіть умову компланарності векторів.
20. Якщо вектори задані координатами, то за допомогою якої формули обчислюється мішаний добуток?

## Завдання для самостійного розв’язання

### ***Рівень 1***

**1.** Знайдіть прості проценти і загальну суму кожної з таких позик:

а) 1000 грн. на 3 роки із процентною ставкою 7%;

б) 5500 грн. на 7 місяців із ставкою процента 6%;

в) 9000 грн. на 12 місяців із ставкою процента 12%.

**2.** Знайдіть поточну вартість для таких випадків:

а) $S = 7000$ грн., $r = 8\%$, $t = 3$ роки;

б) $S = 14500$ грн., $r = 0{,}09$, $t = 2{,}5$ роки.

**3.** Знайдіть суму компаунда і прибуток для таких випадків:

а) $P = 1000$ грн., $r = 0{,}08; m = 4; n = 40$;

б) $P = 3500$ грн., $r = 12\%$; $m = 3$; $n = 36$.

**4.** Знайдіть поточну вартість:

а) $S = 6000$ грн., ставка процента 8% з щоквартальним нарахуванням і терміном 11 років;

б) $S = 9000$ грн., ставка процента 7,6% при щорічному компаунді з терміном 8 років.

**5.** Множини задано переліком елементів: $A = \{1;2;3;4;5;6;7\}$; $B = \{-2;-1;0;1;2;3\}$. Запишіть їх за допомогою характеристичної властивості.

**6.** Множини задано за допомогою характеристичної властивості. Перелічіть їх елементи.

а) $\tilde{N} = \{x | x \in N, -3 < x < 7\}$; б) $D = \left\{x \middle| x \in N, -1 < x \le 4\dfrac{2}{3}\right\}$;

в) $M = \{x | x \in N, -5 \le x < 2\}$; г) $P = \{x | x \in N, -4 \le x \le 4\}$.

**7.** Запишіть множини $A \times B, B \times A$, якщо $A = \{2;4;6;9\}$, $B = \{1;3;5;7;10\}$.

**8.** Обчисліть методом трикутника:

а) $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x & x^2+x+1 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -7 & 3 & 3 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; є) $\begin{vmatrix} -6 & 2 & 5 \\ 10 & 0 & 7 \\ 8 & -5 & 0 \end{vmatrix}$.

**9.** Напишіть усі мінори другого порядку для визначників:

а) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -4 \\ -5 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

**10.** Розв'яжіть системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) методом Крамера:

а) $\begin{cases} 2x-y=-3 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x+2=y \\ 2x+y=5 \end{cases}$.

**11.** Обчисліть:

а) $3A-4B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$;

б) $-2B+6C$, якщо $B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ -1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

в) $5A+B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 8 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

**12.** Знайдіть добуток матриць $AB$ і $BA$, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$.

**13.** Знайдіть скалярний добуток векторів $\overline{a} \cdot \overline{b}$, якщо

$$\left|\overline{a}\right| = 4, \quad \left|\overline{b}\right| = 3, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

**14.** Дано точки $M(-5,7,-6)$, $N(7,-9,9)$. Знайдіть проекцію вектора $\overline{a} = (1,-3,1)$ на вектор $\overline{MN}$.

**15.** Перевірте, чи перпендикулярні вектори: а) $\overline{a}$ (3, 0, -6) і $\overline{b}$ (4,7,2); б) $\overline{c}$ (-3,2,5) і $\overline{d}(6,-3,1)$.

***Рівень 2***

**16.** Щороку населення Землі зростає приблизно на 2%. Дослідіть, яка чисельність людей житиме на планеті у 2020 році, якщо у 1990 їх було 5,2 мільярда чоловік?

**17.** Дослідіть, що дає більший прибуток: 8,8% щорічного компаунда чи 8,5% щоденного? Відповідь обґрунтуйте.

**18.** Яку суму треба інвестувати зараз на умовах 6% річних, щоб через 7 місяців отримати майбутню вартість у 8000 грн.?

**19.** Деяка сума грошей інвестована на 3 роки із ставкою процента 9% при квартальному компаунді. Визначте $i$ та $n$.

**20.** Знайдіть суму компаунда для 50000 грн., вкладених на 2 роки з 6% квартальним компаундом.

**21.** Підприємець вклав 15000 грн. на 3 роки при 11% щоденному нарахуванні. Знайдіть суму компаунда.

**22.** За допомогою кругів Ейлера доведіть, що:

а) $(A \setminus B) \bigcup (A \bigcap C) = A \setminus (B \setminus C)$; в) $\overline{A} \bigcap (B \setminus C) = (\overline{A} \bigcap B) \setminus C$;

б) $(A \bigcup \overline{C}) \setminus B = A \setminus (B \bigcup C)$; г) $\overline{A} \bigcup (\overline{B \bigcup C}) = (\overline{A \bigcap B}) \bigcap (\overline{A \bigcap C})$.

**23.** Користуючись зображеннями числових множин на координатній прямій, знайдіть

$A \bigcup B, A \bigcap B, A \setminus B, B \setminus A, A \times B, B \times A$, якщо:

а) $A = \{x | x \in R, -1 < x \le 5\}$, $B = \{x | x \in R, -6 < x < 3\}$.

б) $A = \{x | x \in R, -3{,}4 \le x < 5\}$, $B = \{x | x \in R, -5 < x < 2\}$.

в) $A = \{x | x \in R, -10 < x \le 4\}$, $B = \{x | x \in R, -3 \le x \le 3\}$.

г) $A = \{x | (x^2 - 1)(x^2 + 2x - 3) = 0\}$, $B = \{x | (x^2 - 1)^2 + (x^2 + 2x - 3)^2 = 0\}$.

**24.** Обчисліть за методом трикутника та розкладом за елементами певного рядка (стовпця):

а) за елементами третього стовпця: $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \\ 8 & -2 & 1 \end{vmatrix}$;

б) за елементами другого рядка: $\begin{vmatrix} 3a & -2b & 0 \\ -5b & 4a & b \\ 0 & 3b & 6a \end{vmatrix}$;

в) за елементами другого стовпця: $\begin{vmatrix} -a & b & c \\ b & -c & a \\ c & a & -b \end{vmatrix}$.

**25.** Розв'яжіть СЛАР методом Крамера:

а) $\begin{cases} 4x + 2y + 3z = -2 \\ 2x + 8y - z = 8 \\ 9x + y + 8z = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 3x + 4y + z = 1 \\ 5x + y - 3z = -2 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 8x_1 + 2x_2 - x_3 = 21 \\ 2x_1 + 11x_2 - 16x_3 = 21 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases}$;

д) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$; е) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ y + 5z = 1 \\ 2x + 3y + z = 3 \end{cases}$.

**26.** Дослідіть, чи виконується рівність $AB \neq BA$ при $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

**27.** Знайдіть матрицю, обернену до даної:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Відповідь запишіть у вигляді числа, що є часткою від ділення суми усіх елементів союзної матриці на визначник даної матриці.

**28.** Розв'яжіть СЛАР матричним способом:

а) $\begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ -x + 2y - 3z = 3 \\ 2x - y + 3z = 2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - 3y - z = 5 \\ x + t - z = 7 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -3 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$; д) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$;

е) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 17 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -3 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -10 \end{cases}$.

**29.** Задано вектори $\overline{a}(3;-5;-2); \overline{b}(4;-1;3); \overline{c}(2;-1;0)$. Обчисліть добутки:

а) $\left(3\overline{a}-\overline{b}+2\overline{c}, \quad 2\overline{a}-\overline{b}+\overline{c}\right)$;
б) $\left(-\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}, \quad -3\overline{a}+8\overline{b}-5\overline{c}\right)$;
в) $\left(9\overline{a}-\overline{c}, \quad -3\overline{a}+10\overline{b}-\overline{c}\right)$.

**30.** Задано вектори: $\overline{a}(3;-1;2), \quad \overline{b}(-1;2;-6)$. Знайдіть координати векторних добутків, використовуючи основні властивості:
а) $\left[(2\overline{a}-\overline{b}),(-\overline{a}+3\overline{b})\right]$; б) $\left[(-4\overline{a}+5\overline{b}),(2\overline{a}-2\overline{b})\right]$.

**31.** Знайдіть мішаний добуток векторів:
а) $\left(\overline{a}\overline{c}\overline{b}\right)$, якщо
$\overline{a}=2\overline{i}+3\overline{j}-4\overline{k}, \quad \overline{b}=\overline{i}-2\overline{j}+\overline{k}, \quad \overline{c}=4\overline{i}+2\overline{j}-3\overline{k}$;
б) $\left(\overline{b}\overline{x}\overline{c}\right)$, якщо
$\overline{x}=-3\overline{j}+2\overline{k}, \quad \overline{b}=\overline{i}-\overline{j}+5\overline{k}, \quad \overline{c}=-2\overline{i}-4\overline{j}+\overline{k}$.

**32.** Дослідіть, чи є вектори компланарними:
а) $\overline{a}$ (2,5,3), $\overline{b}$ (-1,4,-3), $\overline{c}$ (0,-4,1); б) $\overline{a}$ (4,2,1), $\overline{b}$ (8,6,3), $\overline{c}$ (5,2,1).

**33.** Дослідіть, який знак має скалярний добуток векторів $\overline{a}$ та $\overline{в}$, якщо кут, утворений ними, розміщений у другій чверті?

**34.** Доведіть, що чотирикутник з вершинами $A$ (1,4,3), $B$ (2,3,5), $C$ (2,5,1), $D$ (3,4,3) паралелограм.

***<u>Рівень 3</u>***

**35.** Підприємець видав банку тримісячний дисконтний вексель на 15000 грн., ставка дисконту 8%. Знайдіть, яку суму він отримає в банку? Скільки він сплатить банку після закінчення тримісячного терміну при погашенні боргу? Який дисконт заробить банк? Дослідіть залежність виручки від зміни терміну дії дисконтного векселя.

**36.** Вкладник дав 20000 грн. банку, який платить 7% з піврічним компаундом. Через 2 роки він поклав ще 10000 грн. на свій рахунок. Але за цей час ставка прибутку змінилася на 8% з квартальним компаундом. Яка сума грошей буде на рахунку через 5 років від моменту першого вкладу? Дослідіть, чи вигідною для вкладника стала зміна ставки прибутку? На яку величину і як змінилася сума прибутку?

**37.** Використовуючи метод поділу на мікрогрупи, проведіть порівняльну характеристику існуючих пропозицій з інвестицій стосовно розміщених у вашій місцевості банків.

**38.** Запишіть усі підмножини кожної з множин:

а) $A = \{x | x \in N \wedge (x+6)(2x+3)(x-1) = 0\}$;

б) $B = \{x | x \in Z, (x+1)(x-\frac{1}{3})(2x+5) = 0\}$;

в) $C = \{x | x \in N, |x| < 5\}$;

г) $P = \{x | x \in Q, x^2 - 4 = 0\}$.

Дослідіть, які із даних множин мають найбільшу та найменшу кількість підмножин. Чи можна визначити кількість підмножин, не виконуючи розрахунків?

**39.** Дано числові множини: $A = (2;7), B = [4;9], C = (-\infty;3), D = [6;+\infty)$. Запишіть їх за допомогою характеристичної властивості та, користуючись геометричною інтерпретацією (координатна пряма), знайдіть:

а) $(A \setminus B) \bigcup (C \bigcap \overline{D})$; б) $(A \bigcap \overline{B}) \setminus (D \bigcap \overline{C})$.

Дослідіть, чи доцільно використовувати діаграми Ейлера для розв'язування даного завдання? Відповідь обґрунтуйте.

**40.** Розв'яжіть рівняння:

а) $x^2 + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ x & -4 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 15-x^2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 4 & x \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & x^2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -5 & x \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$.

**41.** Дослідіть, чи існує ціле додатне значення змінної, для якого виконується нерівність:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 9^x & 4^x \end{vmatrix} < \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ x^2 & 6^x \end{vmatrix}.$$

**42.** Дослідіть, при яких значеннях параметру $a$ система має безліч розв'язків:

$$\begin{cases} ax + (a+6)y = 3 \\ x + ay = a - 2 \end{cases}.$$

**43.** Дослідіть, при яких значеннях параметра $a$ система не має розв'язків:

а) $\begin{cases} (a+1)x + 2y = a \\ x + (a+2)y = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x + y - 2 = a \\ ax - y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \end{cases}$.

**44.** Дослідіть залежність розв'язків системи від значення $a$:

$$\begin{cases} x - ay + z = 3 \\ 2x + ay - z = -1 \\ x + y + z = 3 \end{cases}.$$

**45.** Дослідіть залежність розв'язків системи від значення $m$:

а) $\begin{cases} x + m^2 y = m \\ x + 4y = -2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x - y = 1 \\ m^2 x - y = m \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 3x - 9y = 2 \\ -2x + 6y = m \end{cases}$.

**46.** Розв'яжіть СЛАР за правилом Крамера. У разі залежності коефіцієнтів системи від параметрів дослідіть системи на сумісність:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1 \\ 3x_1 + 7x_2 = 2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} ax_1 + bx_2 = ad \\ bx_1 + cx_2 = bx \end{cases}$; в) $\begin{cases} ax_1 + 4x_2 = 2 \\ 9x_1 + ax_2 = 3 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$; д) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$;

е) $\begin{cases} 2ax_1 - 23x_2 + 29x_3 = 4 \\ 7x_1 + ax_2 + 4x_3 = 7 \\ 5x_1 + 2x_2 + ax_3 = 5 \end{cases}$.

**47.** Розв'яжіть СЛАР:

а) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_4 = -5 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 6x_4 = 6 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 + x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -3 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 6x_4 = 7 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ 7x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 17 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 9 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$.

Дослідіть, яка математична модель відповідає запропонованим задачам.

Задача 1: На підприємстві виробляється продукція чотирьох видів. Через погані погодні умови, що стали причиною перебоїв з електропостачанням, підприємство працювало в аварійному режимі. За перший день негоди на виготовлення продукції I-го виду необхідно було 2 год., II-го – 1 год., III-го – 3 год., IV-го – 4 год.; другого – 7, 3, 6, 8 год.; третього – 3, 2, 4, 5 год., а останнього затратили 1, 1, 3 та 4 год. відповідно. Результатом такої роботи став прибуток фірми: І-го дня 7 тис. грн., ІІ-го – 17 тис. грн., ІІІ-го – 9 тис. грн., IV-го – 6 тис. грн. Вироблення якого з видів продукції за годину приносило найбільший дохід фірмі?

Задача 2: При пошитті дитячої шкільної форми, що складається зі спідниці та жакета для дівчат і зі штанів та піджака для хлопців, використовують тканини чотирьох кольорів: чорного, зеленого, червоного та коричневого. На кінець робочої зміни кожна з чотирьох бригад фіксує кількість готової продукції. Враховуючи те, що зі складу видали всього 7м чорної, 17м зеленої, 9м червоної, 6м коричневої тканини, причому бригада №1 отримала тканини кожного кольору відповідно по 1, 2, 3, 4 м; бригада №2 – по 7, 14, 20, 27; №3 – по 5, 10, 16, 19, а бригада №4 – 3, 5, 6, 13, визначте, скільки виробів буде пошито на кінець зміни.

Відповідь до задач проаналізуйте з точки зору економіки та оцініть реальність отриманих результатів.

**48.** Підприємець розміщує товар на двох складах, причому на одному знаходиться на 800 т. більше, ніж на другому. Коли він забере з першого 60% товару, а з другого 50%, то на першому залишиться на 200 т. більше, ніж на другому. Скільки товару було на кожному складі спочатку?

**49.** Для виготовлення двох видів товарів $A$ та $B$ використовують 500 кг сталі та 950 кг пластмаси, причому на одиницю товару $A$ витрачають 10 кг сталі і 40 кг пластмаси, а на одиницю товару $B$ – відповідно 20 і 10 кг. Дослідіть, скільки одиниць кожного виду буде виготовлено, якщо при цьому вичерпано всі ресурси?

**50.** Підприємство випускає три види продукції, використовуючи сировину трьох видів. Необхідні характеристики виробництва задано таблицею:

| Вид сировини | Витрати на сировину | | | Запаси сировини |
|---|---|---|---|---|
| | $П_1$ | $П_2$ | $П_3$ | |
| $C_1$ | 5 | 3 | 4 | 2700 |
| $C_2$ | 2 | 1 | 1 | 900 |
| $C_3$ | 3 | 2 | 2 | 1600 |

Дослідіть обсяг випуску кожного виду продукції при повному використанні наявних запасів сировини.

**51.** У трьох торгових точках проведена ревізія і отримані такі дані про кількість проданих товарів трьох видів (в у.о.):

| № магазину | Вид товару | | |
|---|---|---|---|
| | I | II | III |
| 1 | 1 | 0 | 3 |
| 2 | 3 | 1 | 7 |
| 3 | 2 | 1 | 8 |

У касі першого магазину виявлено 31,8 у.о., другого – 154,6 у.о., третього – 141,1 у.о. Для того, щоб порівняти ціни з тими, що є у накладних, дослідіть, за якою ціною продавався кожен вид товару.

**52.** Завод будівельних конструкцій виготовляє бетонні плити трьох видів, для чого затрачає три типи сировини. На виробництво однієї плити I-го виду використовується 3 ц. цементу, 2 ц. гравію та 1 ц. піску; II-го виду – відповідно 2 ц. цементу, 3 ц. гравію і 1 ц. піску; III-го – 2 ц. цементу, 1 ц. гравію, 3 ц. піску. Під час виготовлення плит усього витратили 5 ц. цементу, 1 ц. гравію та 11 ц. піску.

Проаналізуйте отриманий результат та дайте відповідь на питання: скільки плит кожного виду було виготовлено? Дослідіть, чи є реальною дана задача.

**53.** Дослідіть, чи можна знайти добуток матриць і, якщо так, обчисліть його:

$$\text{а)}\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & 2 \\ 8 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad \text{б)}\ \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть усі можливі зміни, які допоможуть обчислити добуток матриць.

**54.** Знайдіть ранг матриці:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 2 & 6 & 5 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -6 & 2 \\ 4 & 8 & 5 & 3 \\ 10 & 7 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Дослідіть, як зміниться ранг матриці, якщо переставити місцями її рядки (стовпці); винести спільний множник за знак матриці?

**55.** Дослідіть правильність твердження, що в результаті приєднання до матриці одного стовпця або рядка її ранг збільшується на одиницю або не змінюється.

**56.** Дослідіть систему і знайдіть її загальний розв'язок залежно від $\lambda$:

а) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1 \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda \end{cases}$; б) $\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2 \end{cases}$.

**57.** Розв'яжіть матричне рівняння:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -8 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -9 & 3 & -7 \\ 1 & -1 & 1 \\ -11 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

Дослідіть, що відбудеться, якщо множники поміняти місцями. Відповідь обґрунтуйте.

**58.** Підприємство випускає чотири види виробів з використанням чотирьох видів сировини. Норми витрат сировини задано матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть витрати сировини кожного виду при заданому плані випуску кожного виду виробів $Q = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 35 & 40 \end{pmatrix}$.

**59.** Два залізобетонних заводи випускають вироби $M, N, P$ вищої, першої та другої категорії якості. Кількість випущених кожним заводом виробів за кожною категорією якості задана таблицею:

| Категорія якості | Готові вироби | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Перший завод | | | Другий завод | | |
| | $M$ | $N$ | $P$ | $M$ | $N$ | $P$ |
| Вища | 150 | 240 | 320 | 280 | 300 | 450 |
| Перша | 100 | 130 | 175 | 120 | 150 | 170 |
| Друга | 25 | 15 | 20 | 30 | 20 | 18 |

Дослідіть, яким буде загальний випуск виробів за означеними категоріями?

**60.** Виконайте розрахунок заробітної плати за кожне із трьох замовлень на виготовлення продукції типів $P_1, P_2, P_3$, якщо таблично задано норми витрати робочого часу кожного з п'яти робітників $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$ для виготовлення одиниці продукції відповідного типу (таблиця 1), кількість замовлених виробів кожного типу $Z_1, Z_2, Z_3$ (таблиця 2) та погодинну заробітну плату (в грн.), що залежить від кваліфікації робітника (таблиця 3):

*Таблиця 1*

| Тип продукції | Витрати робочого часу робітників | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $R_4$ | $R_5$ |
| $P_1$ | 0 | 1 | 3 | 2 | 4 |
| $P_2$ | 3 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| $P_3$ | 1 | 5 | 0 | 4 | 3 |

*Таблиця 2*

| Замовлення | Кількість продукції | | |
|---|---|---|---|
| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ |
| $Z_1$ | 250 | 100 | 300 |
| $Z_2$ | 50 | 0 | 200 |
| $Z_3$ | 100 | 250 | 150 |

*Таблиця 3*

| Номер робітника | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $R_4$ | $R_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Заробітна плата (за год.) | 3,75 | 4,25 | 3,75 | 5 | 4,25 |

Дослідіть, як зміниться заробітна плата, якщо обсяг замовлення збільшиться вдвічі, а витрати робочого часу зменшаться на 50 %?

**61.** Дослідіть вид кута (гострий, тупий чи прямий) між векторами $\overline{a} = (2,4,3)$, $\overline{b} = (1,5,2)$. Якщо змінити напрямок одного із векторів, то чи зміниться величина кута?

**62.** Дослідіть, при якому значенні $\alpha$ вектори $\overline{p} = \alpha \cdot \overline{a} + 17\overline{b}$ і $\overline{q} = 3\overline{a} - \overline{b}$ будуть перпендикулярними, якщо $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 5$ і кут між векторами $\overline{a}$ та $\overline{b}$ буде $\beta = \dfrac{2\pi}{3}$.

**63.** Дано трикутник $ABC$ з вершинами в точках $A(-11,4,2)$, $B(3,-6,5)$, $C(-1,0,1)$. Дослідіть вид трикутника.

**64.** Дано вектори $\overline{a} = -4\overline{i} - 8\overline{j} + 8\overline{k}$, $\overline{b} = 4\overline{i} + 3\overline{j} + 2\overline{k}$. Знайдіть їх векторний добуток, синус кута між ними, площу паралелограма, побудованого на цих векторах. Дослідіть взаємозв'язки векторного добутку та площі паралелограма?

**65.** Обчисліть площу трикутника ABC, якщо:

а) $A(-1,0,2)$, $B(1,-2,5)$, $C(3,0,-4)$;

б) $A(3,5,4)$, $B(8,7,4)$, $C(5,10,4)$;

в) $A(3,0,3)$, $B(5,2,6)$, $C(1,2,0)$.

Запропонуйте різні способи розв'язання даної задачі та дослідіть їх на ефективність.

**66.** Дослідіть раціональність використання різних способів обчислення об'єму трикутної піраміди з такими вершинами:

а) $A(0,0,1)$, $B(2,3,5)$, $C(6,2,3)$, $D(3,7,2)$;

б) $A(5,1,-4)$, $B(1,2,-1)$, $C(3,3,-4)$, $D(2,2,2)$.

# *Модуль 2.*

# Елементи аналітичної геометрії

## ТЕМА 04. ЛІНІЇ НА ПЛОЩИНІ

***План***

1. *Найпростіші задачі аналітичної геометрії: відстань між двома точками; поділ відрізка у даному відношенні; паралельне перенесення осей координат.*
2. *Поняття рівняння лінії на площині.*
3. *Рівняння прямої, яка проходить через дану точку, перпендикулярно до даного вектора.*
4. *Загальне рівняння прямої. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Рівняння прямої у відрізках.*
5. *Канонічне і параметричне рівняння прямої. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.*
6. *Кут між двома прямими. Відстань від точки до прямої.*
7. *Використання прямої для розв'язування професійно спрямованих задач.*

*Основні терміни та поняття:* точка, відстань, відношення, осі координат, паралельне перенесення осей, рівняння прямої, нормальний вектор, загальне рівняння прямої, кутовий коефіцієнт, напрямний вектор, канонічне та параметричне рівняння прямої.

# *СТОРІНКА ІСТОРІЇ*

*У першій половині XVII століття виникла принципово нова галузь математики – аналітична геометрія, в якій за допомогою координатного методу геометричні об'єкти стали досліджуватися засобами алгебри.*

*Вважається, що основи нової геометрії заклав Р.Декарт у своєму трактаті "Геометрія" (1637). Але він небагато досяг у цій галузі, бо недосконалою була його система координат, в якій не розглядалися від'ємні абсциси. Виявляється, що не менше значення мають роботи П.Ферма, проте більшість із них була опублікована вже після смерті автора, що дозволило роботам Р. Декарта отримати пріоритет.*

*Використав і дещо розвинув аналітичну геометрію І. Ньютон у творі "Перелік кривих третього порядку" (1704). В цій роботі автор розкрив нові можливості координатного методу й удосконалив сам метод – ввів рівноправні осі координат, визначив знаки функцій в усіх квадрантах, створив основи дослідження властивостей кривих за властивостями рівнянь, що їх виражають, навів класифікацію кривих, поклавши в основу степені рівнянь.*

*Побудову аналітичної геометрії у формі, звичній для нас, завершив Л.Ейлер, який у другому томі книги "Вступ до аналізу нескінченно малих" (1748) ввів прямолінійні координати (як прямокутні, так і косокутні), роз'яснив спосіб запису рівнянь кривих, розглянув перетворення систем координат – поворот і перенос, з'ясував спільні властивості всіх конічних перерізів тощо.*

*У XVIII столітті завершено формування аналітичної геометрії як науки. Тоді ж відбулось і становлення її як навчального предмета, складової частини вищої математичної та технічної освіти.*

## **1. Найпростіші задачі аналітичної геометрії: відстань між двома точками; поділ відрізка у даному відношенні; паралельне перенесення осей координат**

З курсу математики загальноосвітньої школи відомо, що предметом вивчення геометрії є геометричні об'єкти (точки, лінії, фігури), а предметом вивчення алгебри – числа, рівняння, функції. *Предметом вивчення аналітичної геометрії є вивчення геометричних образів алгебраїчними методами*.

Основним методом аналітичної геометрії є метод координат. За цим методом найпростішому геометричному образу (точці) ставиться у відповідність упорядкована множина чисел – координати цієї точки. Метод координат дозволяє кожному геометричному образу поставити у відповідність його рівняння, а потім шляхом аналітичного дослідження цього рівняння вивчити властивості цього геометричного об'єкта.

До найпростіших задач аналітичної геометрії відносяться:

- відстань між двома точками;
- поділ відрізка у даному відношенні;
- паралельне перенесення осей координат.

***а) Відстань між двома точками***

Нехай дано дві точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Відстань між двома точками $M_1$ та $M_2$ дорівнює довжині вектора $\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, яка обчислюється за формулою:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} . \qquad (4.1)$$

**Завдання 41.** Знайдіть відстань між точками: $M_1(0;-1)$, $M_2(2;1)$.

*Розв'язання*

Скористаємось формулою (4.1) для знаходження відстані між двома точками:

$$d = \sqrt{(2-0)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \text{ лін. од.}$$

**Відповідь:** $\sqrt{8}$ лін. од.

***б) Поділ відрізка у даному відношенні***

Нехай задані координати кінцевих точок відрізка: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Припустимо, що точка $M(x, y)$ ділить цей відрізок у відношенні

$$\lambda = \frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}} .$$

Знайдемо значення невідомих координат точки *M*. Для цього побудуємо вектори $\overline{M_1M}$ і $\overline{MM_2}$, що лежать на одній прямій та співнаправлені (рис. 4.1). Координати даних векторів:

$$\overline{M_1M}(x-x_1, y-y_1) \text{ та } \overline{MM_2}(x_2-x, y_2-y)$$

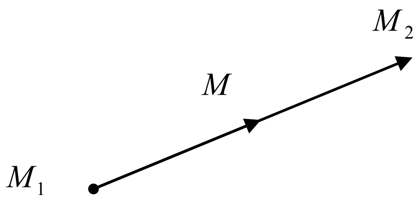



Рис. 4.1

Дані вектори – колінеарні, тобто $\overline{M_1M} = \lambda\overline{MM_2}$. Звідси:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x),$$
$$y - y_1 = \lambda(y_2 - y).$$

Виразивши з останніх рівностей невідомі координати *x* та *y*, одержимо:

$$x = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1+\lambda}; \qquad y = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1+\lambda}. \tag{4.2}$$

Це є ***формула поділу відрізка у даному відношенні***.

У випадку поділу відрізка навпіл $\lambda = 1$. Тобто точки *M* – середина відрізка $M_1M_2$ і формули для обчислення її координат матимуть вигляд:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{4.3}$$

**Завдання 42.** Трикутник $ABC$ задано координатами вершин: А (3; 1), В (1; 5), $C(-3;1)$. Дослідіть, які координати має точка перетину медіан даного трикутника.

*Розв'язання*

Нагадаємо, що медіана – це пряма, що сполучає вершину трикутника з серединою протилежної їй сторони. Побудуємо у трикутнику $ABC$ медіани $AD$ та $BN$ (рис. 4.2). Отже, точка $D$ – середина сторони $BC$. Її координати знайдемо за формулами (4.3):

$$x_D = \frac{1-3}{2} = -1; \qquad y_D = \frac{5+1}{2} = 3.$$

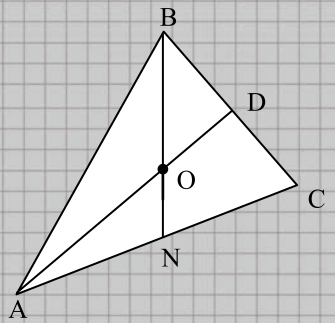



Рис. 4.2

Отже, $D(-1;3)$.

Оскільки медіани точкою перетину діляться у відношенні два до одного ( записується 2:1), то

$$\lambda = \frac{AO}{OД} = \frac{2}{1} = 2 \cdot$$

Тоді координати точки О обчислимо за формулами (4.2) за умови, що $\lambda = 2$:

$$x_0 = \frac{x_A + \lambda x_Д}{1+\lambda} = \frac{3 + 2\cdot(-1)}{1+2} = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3};$$

$$y_0 = \frac{y_A + \lambda y_Д}{1+\lambda} = \frac{1 + 2\cdot 3}{1+2} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}.$$

**Відповідь:** точка О має координати $\left(\frac{1}{3}; 2\frac{1}{3}\right)$.

## *СТОРІНКА ІСТОРІЇ*

***П'єр Ферма (1601-1665)*** *вважається "королем" любителів математики, адже вона була лише хобі для французького юриста. Весь свій вільний час, якого за 34 роки державної служби було багато, Ферма присвячував математиці, займаючись дослідженнями в галузі теорії чисел, геометрії, теорії ймовірностей тощо.*

*Найкращі з відкриттів П.Ферма настільки прості за своїм формулюванням, що будь-який школяр може зрозуміти зміст і оцінити їхню красу. Світової слави набула "Велика теорема Ферма" – рівняння* $x^n + y^n = z^n$*, де* $n$ *– натуральне число, більше за 2, не має нульових розв'язків у цілих числах. До кінця XX століття вона залишалась недоведеною, хоча нею займалося багато видатних учених. Було встановлено навіть спеціальний грошовий приз (у розмірі 100 000 марок), який повинен був вручитися тому, хто доведе цю теорему. І лише в 1995 році це вдалося зробити англійському математику Ендрю Уяйлсу.*

*Що стосується аналітичної геометрії, то П. Ферма більш систематизовано ніж Р.Декарт ввів прямолінійні координати і застосовував їх до вивчення геометрії; вивів рівняння прямої і кривих другого порядку; розглянув задачу про перенесення систем координат (переносив центр координат і повертав осі).*

### ***в) Паралельне перенесення осей координат***

Перш за все віднайдемо формули перетворення декартових координат при паралельному перенесенні, тобто при такій зміні декартової системи, коли змінюється положення початкових координат, а напрямок осей (і масштаб) залишається незмінним.

Нехай $O_x$ і $O_y$ – старі, а $O'x'$ і $O'y'$ – нові координати осі (рис. 4.3). Положення нових осей відносно старої системи визначається заданням старих координат нового початку: $O'(a;в)$. Число а називається ***переносом у напрямку осі*** $O_x$, число в – називається ***переносом у напрямку осі*** $O_y$.

Нехай точка М площини має відносно старих осей деякі координати ($x; y$). Ця точка по відношенню до нових осей має інші координати: $(x'; y')$. Наша мета – встановити формули, що виражають $x$ і $y$ через $x'$ і $y'$ ( або навпаки).

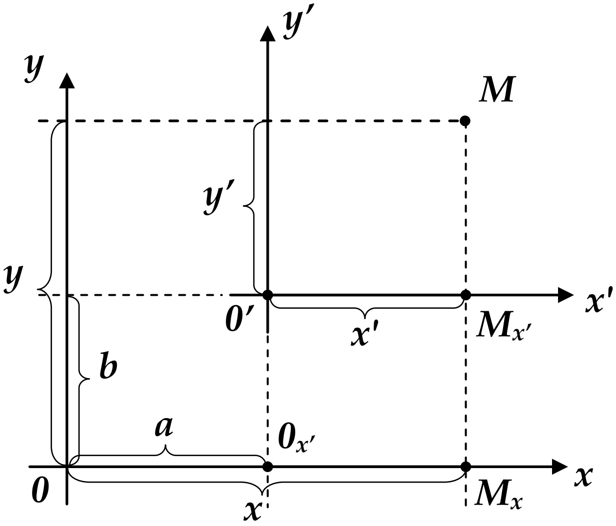



Рис. 4.3

Спроектуємо точку $O'$ на вісь $O_x$ і точку М на вісь $O_x$ і $O'x'$. Позначимо проекцію точки $O'$ на вісь $O_x$ через $O'_x$, проекції точки М на осі $O_x$ і $O'x'$ – через $M_x$ і $M'_x$. Очевидно, величина відрізка $O_x^{'}M_x$ осі $O_x$ рівна величині відрізка $O'M'_x$ осі $O'x'$. Але $O'M_{x'}=x'$; отже $O_x^{'}M_x = x'$. Крім того, $OO'_x$=a, $OM_x = x$. Згідно з співвідношенням AB+BC=AC матимемо рівність $OM_x = OO'_x + O'_xM$, з якої та на основі попереднього отримаємо:

$$x = x' + a \ .$$

Аналогічно з допомогою проектувань на осі $O_y$ і $O'_{y'}$ знайдемо

$$y = y' + в .$$

Отже, це і є шукані формули. Їх можна також записати у вигляді:

$$x' = x - a \ ; \qquad\qquad y' = y - в . \qquad (4.4)$$

Отже, ***паралельне перенесення осей здійснюється так:*** при паралельному перенесенні декартової системи координат на величину $a$ в напрямку осі $O_x$ і на величину $b$ в напрямку осі $O_y$ абсциси всіх точок зменшуються на величину $a$, ординати на величину $b$.

## 2. Поняття рівняння лінії на площині

Розглянемо рівність

$$F(x; y) = 0 , \qquad (4.5)$$

яка зв'язує змінні величини $x, y$. Дану рівність називають ***рівнянням з двома змінними,*** якщо вона виконується не для всіх пар чисел $x$ та $y$, і називається ***тотожністю***, якщо вона справедлива для всіх $x$ та $y$.

Рівняння (4.5) називається ***рівнянням лінії l,*** яка задана на площині відносно певної системи координат, якщо це рівняння задовольняють координати $x$ та $y$ кожної точки лінії $l$ і не задовольняють координати $x$ та $y$ жодної точки, яка не лежить на цій лінії.

Коли рівняння (4.5) є рівнянням лінії ***l***, то кажуть, що це рівняння визначає (або задає) лінію. Отже, якщо лінія задана рівнянням, то про кожну точку площини можна сказати, чи лежить вона на цій лінії, чи не лежить. Якщо координати точки задовольняють рівняння лінії, то точка лежить на ній, якщо не задовольняють, то не лежить.

Лінія, яка задана рівнянням (4.5) відносно певної системи координат у площині, є геометричним місцем точок, координати яких задовольняють задане рівняння.

Змінні $x$ та $y$ в рівнянні (4.5) лінії називаються ***змінними координатами її точок***.

Ми вивчатимемо лінії першого та другого порядків, тобто лінії, що задаються відповідно рівняннями:

$$ax + by + c = 0 \qquad \text{та}$$

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 .$$

## **3. Рівняння прямої, яка проходить через дану точку, перпендикулярно до даного вектора**

***Означення. Нормальним вектором*** *прямої називають будь-який ненульовий вектор, який перпендикулярний до даної прямої.*

Нехай задана точка $M_0(x_0, y_0)$ і нормальний вектор $\vec{n}$ (A;B). Запишемо рівняння прямої, що проходить через точку $M_0$, перпендикулярну до даного вектора. Для цього на прямій $l$ (рис. 4.4) візьмемо будь-яку точку М $(x, y)$ і побудуємо вектор $\overline{M_0M}\ (x - x_0, y - y_0)$.

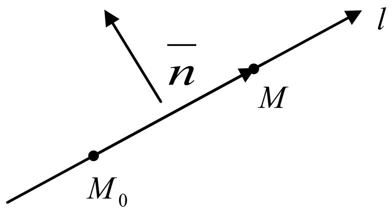



Рис. 4.4

Оскільки $\vec{n} \perp \overline{M_0M}$, то $\vec{n}\ \ \overline{M_0M}$ =0. Звідси випливає ***рівняння прямої, яка проходить через дану точку і перпендикулярна до вектора:***

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 . \qquad (4.6)$$

**Завдання 43.** Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $M_0$(3; -2) перпендикулярно до вектора $\vec{n}$(4; 5).

*Розв'язання*

За умовою задачі маємо, що координати точки $M_0$
Використовуючи рівняння (4.6), отримаємо:

$$4(x-3)+5(y+2)=0$$
$$4x-12+5y+10=0$$
$$4x+5y-2=0$$

## 4. Загальне рівняння прямої. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Рівняння прямої у відрізках

Якщо у рівнянні (4.6) розкрити дужки і позначити $C=-Ax_0-By_0$, то отримаємо ***загальне рівняння прямої:***

$$Ax+By+C=0. \tag{4.7}$$

Проведемо дослідження загального рівняння прямої.

1) Якщо C=0, то пряма $Ax+By=0$ проходить через початок координат.

2) Якщо A=0, то пряма $By+C=0$ (або $y=-\frac{C}{B}$) паралельна до осі $OX$.

3) Якщо B=0, то пряма $Ax+C=0$ (або $x=-\frac{C}{A}$) паралельна до осі $OY$.

4) Якщо A=C=0, то пряма $By=0$ (або y=0) являє собою рівняння осі ОХ (співпадає з віссю ОХ).

5) Якщо B=C=0, то пряма $Ax=0$ (або x=0) являє собою рівняння осі ОУ.

Якщо у рівнянні (4.7) $B \neq 0$, то, розв'язавши це рівняння відносно $y$, одержимо:

$$Ax + By + C = 0;$$

$$By = -Ax - C;$$

$$y = \frac{-A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Позначимо через $k = -\frac{A}{B}$, а через $b = -\frac{C}{B}$. Одержимо ***рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:***

$$y = kx + b\,. \tag{4.8}$$

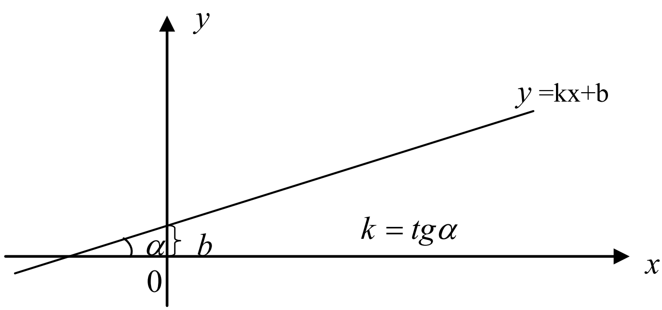



Рис. 4.5

Якщо у рівнянні (4.6) $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ коефіцієнт $B \neq 0$, то це рівняння можна переписати так:

$$y - y_0 = -\frac{A}{B}(x - x_0).$$

Оскільки за раніше введеним позначенням $-\frac{A}{B} = k$, то отримуємо ***рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, що проходить через точку***

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{4.9}$$

**Завдання 44.** Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(1;\,2)$ та утворює з віссю ОХ кут $\alpha = 60°$.

*Розв'язання*

Оскільки за умовою завдання шукана пряма нахилена під кутом до осі абсцис, то знайдемо значення її кутового коефіцієнта $k$ як тангенс кута нахилу:

$$k = tg\alpha = tg60° = \sqrt{3}.$$

Тоді з (4.9) випливає, що

$$y-2=\sqrt{3}(x-1);$$

$$y-2=\sqrt{3}x-\sqrt{3}.$$

Отримане рівняння можна подати і у загальному вигляді (4.7):

$$y-\sqrt{3}x-2+\sqrt{3}=0 \text{ або } y-\sqrt{3}x-(2-\sqrt{3})=0.$$

**Відповідь:** $y-2=\sqrt{3}(x-1)$ або $y-\sqrt{3}x-(2-\sqrt{3})=0$.

Перепишемо рівняння (4.7) у вигляді $Ax+By=-C$. Припустимо, що $C\neq 0$ і розділило це рівняння на $-C$. Отримаємо:

$$-\frac{Ax}{C}+\frac{By}{-C}=1 \qquad \text{або} \qquad \frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1.$$

При виведенні формули (4.8) було введено позначення $-\frac{C}{B}=b$. За аналогією, нехай $-\frac{C}{A}=a$. Тоді отримаємо рівняння***:***

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \tag{4.10}$$

де *a, b* – відрізки, які відтинає пряма на осях координат (рис. 4.6), що називається ***рівнянням прямої у відрізках на осях.***

**Завдання 45.** Перейдіть від загального рівняння прямої $3x-4y-12=0$ до рівняння у відрізках на осях і побудуйте дану пряму.

*Розв'язання*

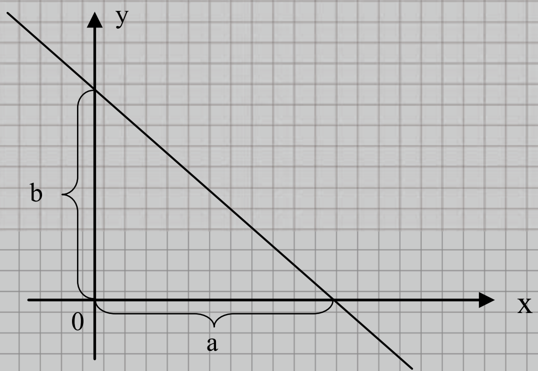



Рис. 4.6

Виконаємо перехід від загального рівняння прямої (4.7) до рівняння у відрізках на осях (4.10) аналогічно до теорії. Перепишемо дане рівняння

$$3x-4y-12=0$$

у вигляді

$$3x-4y=12.$$

Рівняння (4.10) отримаємо, поділивши обидві частини перетвореного рівняння на 12:

$$\frac{3x}{12}-\frac{4x}{12}=1.$$

Після скорочення матимемо шукане рівняння:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{-3}=1.$$

Щоб виконати побудову, позначимо на осі абсцис точку $x=4$, а на осі ординат – $y=-3$ і проведемо через дві точки пряму (рис. 4.7).

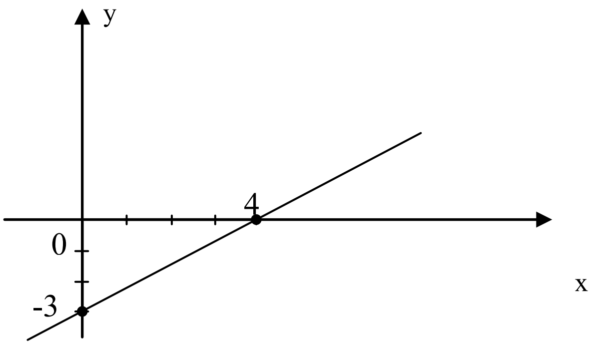



Рис. 4.7

**5. Канонічне і параметричне рівняння прямої. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки**

***Означення. Напрямним вектором*** *прямої називається будь-який ненульовий вектор, паралельний до даної прямої.*

Нехай задана точка $M_0\left(x_0, y_0\right)$ і напрямний вектор $\vec{s}(m,n)$. Для того, щоб отримати рівняння прямої $l$, яка проходить через точку $M_0\left(x_0, y_0\right)$ паралельно до $\overline{s}(m,n)$, оберемо на ній (рис. 4.8) будь-яку точку $M(x,y)$ і побудуємо вектор $\overline{M_0M}$, координати якого

$$\left(x - x_0, y - y_0\right).$$

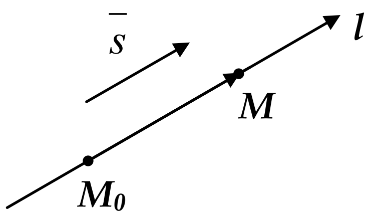



Рис. 4.8

Оскільки $\vec{s}$ колінеарний $\overline{M_0M}$, то їхні відповідні координати пропорційні (за умовою колінеарності векторів):

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}. \qquad (4.11)$$

Це є ***канонічне рівняння прямої***.

Прирівняємо обидві частини рівності (4.11 ) до деякого числа t (параметр):

$$\frac{x-x_0}{m}=t \qquad \text{і} \qquad \frac{y-y_0}{n}=t.$$

Оскільки дві дані рівності отримані з однієї (4.11), то їх необхідно розглядати в системі.

Скориставшись властивістю пропорції (добуток крайніх множників дорівнює добутку середніх), матимемо:

$$\begin{cases} x-x_0=mt \\ y-y_0=nt \end{cases}.$$

Або, виокремивши значення невідомих, отримаємо ***параметричне рівняння прямої*:**

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \end{cases}. \qquad (4.12\ )$$

**Завдання 46**. Запишіть канонічне та параметричне рівняння прямої, яка проходить через точку М (2; 4) паралельно до вектора $\vec{s}$ (1; 3).

*Розв'язання*

Скориставшись формулою (4.11), запишемо канонічне рівняння даної прямої:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+4}{3}.$$

А на основі (4.12 ) отримаємо параметричне рівняння:

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=-4+3t \end{cases}.$$

**Відповідь:** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+4}{3}$ та $\begin{cases} x=2+t \\ y=-4+3t \end{cases}.$

Нехай дано дві точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Запишемо рівняння прямої, що проходить через дві дані точки. Для цього побудуємо вектор $\overline{M_1M_2}$ $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ і візьмемо його за напрямний (рис. 4.9).

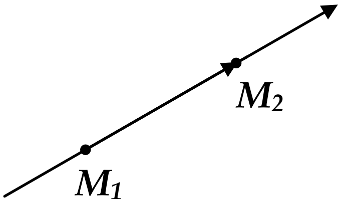



Рис. 4.9

Використовуючи рівняння (4.11), одержимо ***рівняння прямої, яка проходить через дві точки:***

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{4.13 }$$

**Завдання 47.** Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1$(0; -2) та $M_2$(3; 2).

*Розв'язання*

На основі (4.13 ), де $x_1 = 0$, $y_1 = -2$, $x_2 = 3$, $y_2 = 2$, матимемо:

$$\frac{x-0}{3-0} = \frac{y+2}{2+2} \quad \text{або} \quad \frac{x}{3} = \frac{y+2}{4}.$$

**Відповідь:** $\frac{x}{3} = \frac{y+2}{4}$.

## 6. Кут між двома прямими. Відстань від точки до прямої

Нехай дано дві прямі своїми загальними рівняннями:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad \text{і} \qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

що перетинаються під довільним кутом $\alpha$.

***Означення. Кут між двома прямими** визначається кутом між їх нормальними векторами $\vec{n}_1(A_1, B_1)$ та $\vec{n}_2(A_2, B_2)$.*

Використовуючи поняття скалярного добутку, запишемо формулу для знаходження кута $\alpha$ між даними прямими:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \qquad \text{або} \qquad \cos\alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (4.14)$$

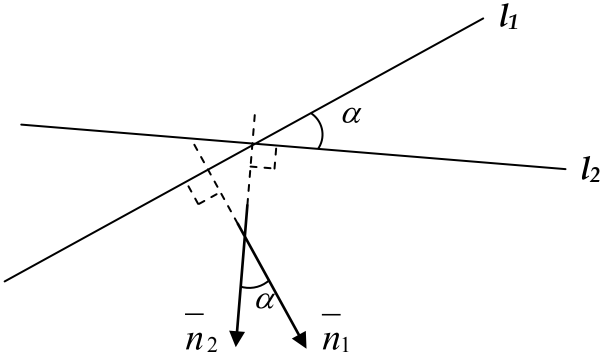



Рис. 4.10

Використовуючи кутові коефіцієнти прямих, отримаємо $tg\alpha = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$.

При перетині двох прямих можливі такі часткові випадки: прямі паралельні або перпендикулярні. Справедливими будуть такі твердження:

1) Якщо *дві прямі* $l_1, l_2$ *паралельні*, то їх нормальні вектори $\vec{n}_1(A_1, B_1)$ та $\vec{n}_2(A_2, B_2)$ також паралельні, а отже, їх координати пропорційні (за умовою колінеарності векторів):

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1}. \qquad (4.15)$$

Дана рівність називається ***умовою паралельності двох прямих.***

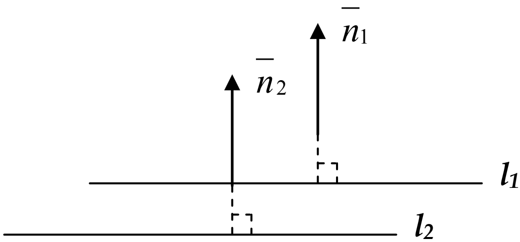



Рис. 4.11

2) Якщо *дві прямі* $l_1, l_2$ *перпендикулярні*, то їх нормальні вектори перпендикулярні, а тому виконується умова перпендикулярності векторів – їх скалярний добуток дорівнює нулю:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \qquad (4.16)$$

Це є ***умова перпендикулярності двох прямих.***

**Завдання 48.** Знайдіть кут між прямими $3x - 4y + 5 = 0$ і $3x + 4y - 9 = 0$.

*Розв'язання*

За формулою (4.14) отримаємо значення косинуса даного кута:

$$\cos\alpha = \frac{3 \cdot 3 - 4 \cdot 4}{\sqrt{9+16} \cdot \sqrt{9+16}} = -\frac{7}{25}.$$

Тоді значення самого кута $\alpha$ знайдемо за допомогою обернено тригонометричної функції:

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{7}{25}\right).$$

**Відповідь:** $\alpha = \arccos\left(-\frac{7}{25}\right)$.

Розглянемо пряму, задану загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$. Нехай точка $M_0\left(x_0, y_0\right)$ не належить даній прямій (мал. 39).

***Означення.*** ***Відстанню від точки до прямої*** *називається довжина перпендикулярного, опущеного з даної точки на пряму. Вона знаходиться за допомогою формули:*

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (4.17)$$

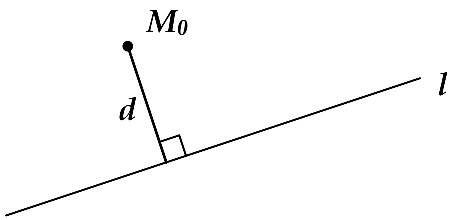



Рис. 4.12

**Завдання 49.** Знайдіть відстань від точки $(3;4)$ до прямої $y = 2x - 3$.

*Розв'язання*

Перепишемо рівняння даної прямої у загальному вигляді:

$$2x - y - 3 = 0.$$

Користуючись умовою задачі та загальним рівнянням прямої, зазначимо, що:

$$x_0 = 3; y_0 = 4; A = 2; B = -1; C = -3.$$

Скориставшись формулою (4.17), отримаємо:

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{\left|2 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 - 3\right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{\left|6 - 4 - 3\right|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{\left|-1\right|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\textit{лін.од}) \cdot$$

**Відповідь:** $d = \dfrac{1}{\sqrt{5}} (\textit{лін.од})$.

## 7. Використання прямої для розв’язування професійно спрямованих задач

Основні поняття, методи та формули аналітичної геометрії широко застосовуються в багатьох навчальних дисциплінах вищих економічних навчальних закладів, а також у різноманітних економічних задачах.

Зокрема рівняння прямої та її графік використовуються при ***визначенні рентабельності транспортного постачання***.

**Завдання 50.** Визначте рентабельність транспортних перевезень одиниці вантажу $(y)$ залізничним та автомобільним транспортом на відстань $x$ км, якщо транспортні витрати знаходяться відповідно за формулами: $y = \frac{1}{2}x + 10$, $y = x + 5$. На яких відстанях який вид транспорту вигідніше використовувати?

*Розв’язання*

Побудуємо графіки транспортних витрат перевезення (рис. 4.13)

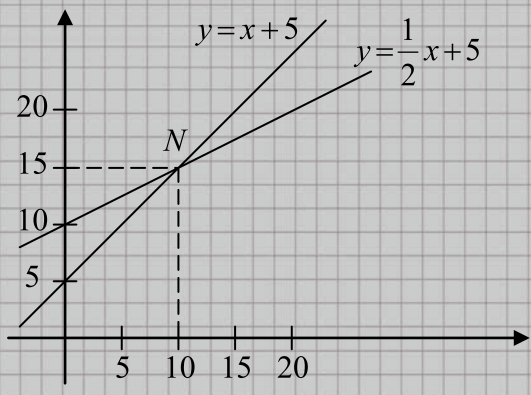



Рис. 4.13

Це прямі, які перетинаються в точці $N$. Знайти її координати можна аналітично. Для цього необхідно розв’язати систему, рівняннями якої є рівняння тих прямих, які при перетині дали цю точку. У нашому випадку система

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x + 10 \\ y = x + 5 \end{cases}$$

має розв'язок: $x = 10; y = 15$.

Отже, точка перетину прямих – $N(10;15)$.

Графіки витрат дозволяють зробити висновок, що і є відповіддю до поставленого завдання.

**Відповідь:**
1) коли $x \in [0;10)$, тобто коли кількість кілометрів менша за 100, транспортні витрати перевезення автотранспортом нижче витрат перевезення залізничним транспортом;
2) коли $x \in [10;\infty)$, тобто коли кількість кілометрів більша за 100, більш рентабельним буде залізничний транспорт.

Ще одним прикладом застосування лінії на площині для розв'язування економічних задач може бути побудова ***бюджетної прямої***.

**Завдання 51.** Бюджет сім'ї, який становить $p$ грн., витрачається на те, щоб придбати товари двох видів: виду *A* – за ціною $a$ грн. та виду *B* – за ціною $b$ грн. за одиницю. В яких кількостях можна придбати ці товари?

*Розв'язання*

Позначимо через $x$ кількість товару виду *A*, через $y$ – товару *B*, які планується закупити. Зрозуміло, що змінні $x \geq 0$, $y \geq 0$ повинні задовольняти рівність:

$$ax + by = p .$$

Побудована пряма, що задається даним рівнянням і проходить через точки $M\left(0;\dfrac{p}{b}\right)$, $N\left(\dfrac{p}{a};0\right)$, називається ***бюджетною*** (рис. 4.14).

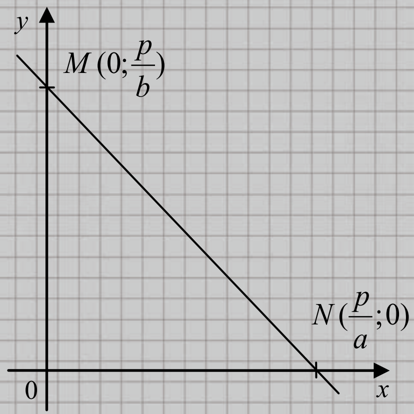



Рис. 4.14

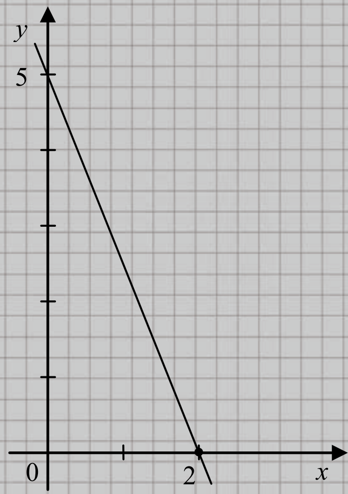



Рис. 4.15

Реальний зміст у даній задачі має відрізок $MN$. Надавши конкретних значень змінним (рис. 4.15), наприклад $p=10$, $a=5$, $b=2$ (тис. грн.), зробимо *висновок:*

1) сім'я може витратити всі гроші на придбання двох товарів виду *A;*

2) сім'я може витратити всі гроші на придбання п'яти товарів виду *B*;

3) сім'я може витратити гроші на придбання одного товару виду *A*, двох товарів виду *B* (у цьому випадку бюджет буде використано не повністю).

**У результаті вивчення теми необхідно:**

| *знати* | *вміти* |
|---|---|
| - поняття рівняння лінії на площині;<br>- різновиди рівнянь прямої лінії на площині;<br>- умови паралельності та перпендикулярності прямих, заданих загальним рівнянням;<br>- означення та формулу для обчислення кута між двома прямими. | - переходити від однієї форми запису прямої до іншої;<br>- визначати кут між прямими та їх рівняннями;<br>- знаходити відстань від точки до прямої, відстань між точками, координати ділення відрізка;<br>- записувати рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки;<br>- застосовувати знання з аналітичної геометрії до дослідження властивостей геометричних фігур (зокрема трикутника);<br>- застосовувати вивчені формули та властивості до розв'язування задач на дослідження найраціональнішим способом (таким, що потребує менших затрат часу, зусиль та швидше приводить до шуканого результату). |

## Питання для самоконтролю

1. Запишіть формулу для знаходження відстані між двома точками.
2. Якщо відрізок певною точкою ділиться у заданому відношенні. З допомогою яких формул можна знайти координати точки поділу?
3. У чому полягає суть паралельного переносу осей координат?
4. Сформулюйте означення нормального вектора.
5. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку перпендикулярно до даної прямої.
6. Виведіть загальне рівняння прямої.
7. Запишіть рівняння з кутовим коефіцієнтом та з кутовим коефіцієнтом, що проходить через точку, та вкажіть, чому дорівнює кутовий коефіцієнт.
8. Як за допомогою рівняння у відрізках на осях побудувати пряму?
9. Сформулюйте означення напрямного вектора.
10. Запишіть канонічні та параметричні рівняння прямої.
11. Який вигляд має рівняння прямої, що проходить через дві точки?
12. Сформулюйте означення кута між прямими та запишіть формулу для його обчислення.
13. Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності двох прямих.
14. Як знайти відстань від точки до прямої? Сформулюйте означення відстані та запишіть формулу для її обчислення.

# ТЕМА 05. ЛІНІЇ У ПРОСТОРІ

***План***

1. *Рівняння площини, яка проходить через дану точку, перпендикулярну до даного вектора.*
2. *Загальне рівняння площини.*
3. *Рівняння площини у відрізках.*
4. *Рівняння площини, яка проходить через три задані точки.*
5. *Кут між двома площинами.*
6. *Відстань від точки до площини.*
7. *Канонічні і параметричні рівняння прямої у просторі.*
8. *Рівняння прямої, що проходить через дві точки у просторі. Кут між двома прямими.*
9. *Кут між прямою і площиною. Точка перетину прямої і площини.*

*Основні терміни та поняття:* нормальний вектор площини, загальне рівняння площини, рівняння площини у відрізках, колінеарні та компланарні вектори, умови паралельності та перпендикулярності двох векторів, відстань від точки до площини, канонічні та параметричні рівняння прямої, кут між прямою і площиною, точка перетину прямої і площини.

## **1. Рівняння площини, яка проходить через дану точку перпендикулярно до даного вектора**

Окрім точки та прямої, основними поняттями геометрії в просторі є площина. Тому для розв’язування завдань аналітичної геометрії поряд з рівнянням прямої часто доводиться записувати й рівняння площини.

***Означення. Нормальним вектором площини*** *називають будь-який ненульовий вектор, який перпендикулярний до цієї площини.*

Нехай дано точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, що належить площині $\alpha$ і її нормальний вектор $\vec{n}$ (A, B, C). Візьмемо на площині $\alpha$ довільну точку $M(x, y, z)$ і побудуємо вектор $\overline{M_0M}$, координати якого:

$$\overline{M_0M}\left(x-x_0, y-y_0, z-z_0\right).$$

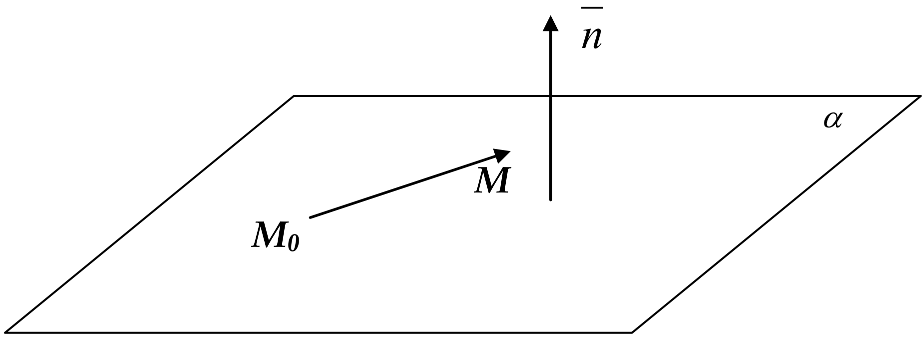



Рис. 5.1

Оскільки $\vec{n}$ перпендикулярний до площини, то $\vec{n}$ перпендикулярний $\overline{M_0M}$. За властивістю скалярного добутку, якщо $\vec{n}$ перпендикулярний $\overline{M_0M}$, то

$$\vec{n}\cdot\overline{M_0M}=0.$$

Звідси одержуємо ***рівняння площини, що проходить через дану точку перпендикулярно до даного вектора:***

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (5.1)$$

**Завдання 52.** Запишіть рівняння площини, яка проходить через точку $M_0$ (2; -3; 4) перпендикулярно до вектора $\vec{n}$ (1; 2; 3).

*Розв'язання*

За формулою (6.1), при A=-1, B=2, C=3, $x_0=2$, $y_0=-3$, $z_0=4$, маємо:

$$-(x-2)+2(y+3)+3(z-4)=0.$$

**Відповідь:** $-(x-2)+2(y+3)+3(z-4)=0$.

Проведемо аналогію між отриманим рівнянням площини та рівнянням прямої, що проходить через точку перпендикулярно до вектора:

| Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно до нормального (перпендикулярного до прямої) вектора $\vec{n}$ (A;B): $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ | Рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до нормального вектора $\vec{n}$ (A, B, C): $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ |
|---|---|

***Зауваження*:** Таке порівняння нагадує нам, що точка на площині має дві координати, а в просторі – три. Тому й вектор задається відповідно двома чи трьома координатами.

**2. Загальне рівняння площини**

Використовуючи аналогічні міркування, вважатимемо, що загальне рівняння площини можна записати у вигляді:

| *Загальне рівняння прямої:* | *Загальне рівняння площини*: |
|---|---|
| $Ax + By + C = 0$, де *A, B, C* – довільні числа. | $Ax + By + Cz + D = 0$, де *A, B, C, D* – довільні числа. |

Перевіримо наше припущення.

Якщо у рівнянні (5.1) розкрити дужки, тобто

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$
$$Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0$$
$$Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0$$

і позначити $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$, то одержимо ***загальне рівняння площини*:**

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (5.2)$$

Існують такі часткові випадки:
1) якщо $A=B=D=0$, то $z=0$ – рівняння координатної площини $XOY$;
2) якщо $A=C=D=0$, то $y=0$ – рівняння координатної площини $XOZ$;
3) якщо $B=C=D=0$, то $x=0$ – рівняння площини $XOY$.

## 3. Рівняння площини у відрізках

Пряма, побудована у декартовій системі координат, може задаватися рівнянням у відрізках на осях. Відповідно побудована в просторі площина також відтинатиме на осях координат відрізки певної довжини:

| Рівняння прямої у відрізках на осях: | Рівняння площини у відрізках на осях: |
|---|---|
| $\frac{x}{a}+\frac{y}{в}=1.$ | $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$ |

Для перевірки зробленого припущення перепишемо рівняння (5.2) у вигляді:

$$Ax+By+Cz=-D\,.$$

Припустимо, що $D\neq 0$ і поділимо останнє рівняння на (- D ):

$$\frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}=1 \qquad \text{або} \qquad \frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1.$$

Нехай $-\frac{D}{A}=a$, $-\frac{D}{B}=в$, $-\frac{D}{C}=c$. Тоді одержимо ***рівняння площини у відрізках***:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{5.3}$$

де $a$, $b$, $c$ – відрізки, що відтинає вектор на осях координат.

**Завдання 53.** Перейдіть від загального рівняння площини $3x - 4y + 2z - 12 = 0$ до рівняння площини у відрізках.

*Розв'язання*

$$3x - 4y + 2z - 12 = 0;$$

$$3x - 4y + 2z = 12;$$

$$\frac{3x}{12} - \frac{4y}{12} + \frac{2z}{12} = 1;$$

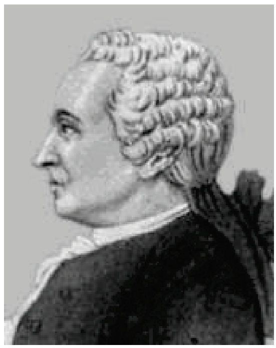
$$\frac{x}{4} - \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1.$$

Тобто $a = 4$, в=-3, с=6.

**Відповідь**: $\frac{x}{4} - \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1$.

---

## *СТОРІНКА ІСТОРІЇ*



***Алексі Клод Клеро*** *(1713-1765) — французький математик, геометр, астроном і геодезист, член Паризької Академії (1731), іноземний почесний член Петербурзької Академії Наук (1754).*

*Народився в сім'ї паризького викладача математики. Вже у віці дванадцяти років вразив паризьких академіків своєю роботою про деякі криві четвертого порядку, і вони влаштували Клеро цілий іспит, щоб переконатися в його авторстві. Іспит Клеро витримав.*

*В 1731 році в книзі А.Клеро «Дослідження про криві подвійної кривини» (тобто просторових кривих) розпочато систематичне використання просторових координат в аналітичній геометрії. Ця книга започаткувала одразу три геометричні дисципліни: аналітичну геометрію в просторі (кривими на площині займався Декарт), диференціальну геометрію та нарисну геометрію. Клеро записав у явній формі загальну формулу відстані між двома точками на площині та в просторі, а також* ***рівняння площини у відрізках****. У цьому ж році (1731) вісімнадцятирічний Клеро був обраний членом Паризької академії — безпрецедентний випадок в історії Академії. У 25 років став її дійсним членом.*

*У цей час Академія вирішила покласти край тривалим суперечкам про те, чи сплющена наша планета (як доводив Ісаак Ньютон) або, навпаки, витягнута біля полюсів на зразок лимона, як це виходило з робіт Жана Пікара та Джованні*

*Доменіко Касіні. Для проведення вимірювань довжини градуса меридіана були організовані експедиції (1735-1737 роки) в Перу та Лапландію. Клеро взяв участь у лапландській експедиції (1736) разом з Мопертюї. Вимірювання підтвердили точку зору Ньютона: Земля стиснута в полюсів, коефіцієнт стиснення, за сучасними даними, дорівнює 1/298,25 (Ньютон передбачив 1/230).*

*Клеро несподівано помер у віці 52 роки в Парижі 17 травня 1765.*

## 4. Рівняння площини, що проходить через три задані точки

Нехай дано три точки, що не лежать на одній прямій: $M(x_1;y_1;z_1)$, $M(x_2;y_2;z_2)$, $M(x_3;y_3;z_3)$.

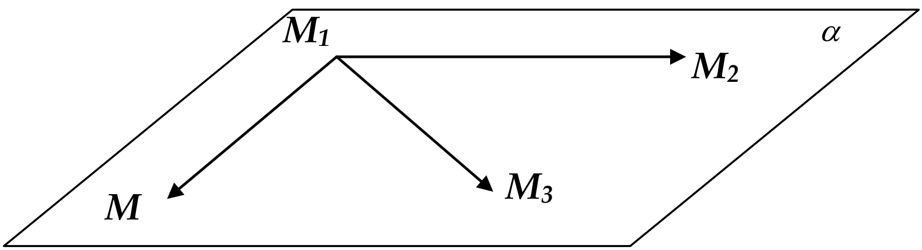



Рис. 5.2

Візьмемо на площині довільну точку $M(x,y,z)$ і побудуємо три вектори:

$\overline{M_1M}(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$; $\overline{M_1M_2}(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$;
$\overline{M_1M_3}(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)$.

Дані вектори є компланарними (лежать в одній площині), тому їх мішаний добуток дорівнює нулю (за умовою компланарності векторів), тобто

$$(\overline{M_1M}\cdot\overline{M_1M_2}\cdot\overline{M_1M_3})=0\,. \qquad (5.4)$$

Звідси одержимо ***рівняння площини, що проходить через три точки***:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 . \qquad (5.5)$$

**Завдання 54.** Запишіть рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1$ (0; -2; 1 ), $M_2$ (2; 3; -5 ) , $M_3$ (5; 4; 2 ).

*Розв'язання*

Використавши формулу (6. 4), отримаємо:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y+2 & z-1 \\ 2-0 & 3+2 & -5-1 \\ 5-0 & 4+2 & 2-1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Тобто

$$\begin{vmatrix} x & y+2 & z-1 \\ 2 & 5 & -6 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Або, якщо обчислити визначник третього порядку, шукане рівняння можна записати у вигляді:

$$41x - 32y - 13z - 51 = 0 .$$

**Відповідь:** $41x - 32y - 13z - 51 = 0$ .

## 5. Кут між двома площинами

Розглянемо рівняння двох площин (рис. 5.3):

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

і

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

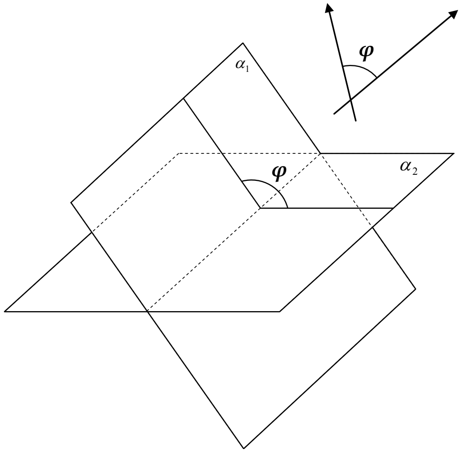



Рис. 5.3

***Означення. Двогранний кут між двома площинами*** *виражається лінійним кутом між їх нормальними векторами $\vec{n}_1$ ( $A_1$, $B_1$, $C_1$ ) та $\vec{n}_2$ ( $A_2$, $B_2$, $C_2$ ).*

Кут між площинами визначається через кут між нормальними векторами, для знаходження якого існує конкретна формула. Врахувавши, що у просторі вектори задаються трьома координатами, робимо припущення, що виконується відповідність:

| ***Кут між двома прямими на площині :*** | ***Кут між двома площинами:*** |
|---|---|
| $\cos\alpha = \dfrac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\lvert\vec{n}_1\rvert \cdot \lvert\vec{n}_2\rvert}$ $= \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$, <br><br> де $\vec{n}_1\left(A, B_{11}\right)$ , $\vec{n}_2\left(A_2, B_2\right)$ – нормальні вектори прямих $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. | $\cos\varphi = \dfrac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{\lvert\overline{n_1}\rvert \cdot \lvert\overline{n_2}\rvert} =$ $= \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$, (5.6) <br><br> де $\vec{n}_1$ ( $A_1, B_1, C_1$), $\vec{n}_2$ ( $A_2, B_2, C_2$) – нормальні вектори площин $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. |

**Завдання 55**. Знайдіть кут між двома площинами $x - y + 7 = 0$ та $y + z - 9 = 0$.

*Розв'язання*

З даних рівнянь площин знаходимо координати нормальних векторів:

$$\vec{n}_1\ (1; -1; 0), \qquad \vec{n}_2\ (0; 1; 1).$$

Тоді, користуючись формулою (5.6), знаходимо, що

$$\cos\varphi = \frac{0 - 1 + 0}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{1+1}} = \frac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}.$$

Отже, для знаходження значення самого кута необхідно скористатись поняттям обернено тригонометричної функції:

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} = \frac{2\cdot 180^\circ}{3} = 120^\circ .$$

**Відповідь:** $120^0$.

Запишемо умови паралельності та перпендикулярності двох площин у просторі, використовуючи аналогічні твердження, які виконуються для прямих на площині:

| | |
|---|---|
| ***Умова паралельності двох прямих на площині***: $$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1};$$ ***умова перпендикулярності двох прямих на площині***: $$A_1A_2 + B_1B_2 = 0,$$ де $\vec{n}_1\left(A, B_{11}\right)$, $\vec{n}_2\left(A_2, B_2\right)$ – нормальні вектори прямих $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. | ***Умова паралельності двох площин:*** $$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1};\ (5.7)$$ ***умова перпендикулярності двох площин:*** $$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0,\ (5.8)$$ де $\vec{n}_1\ (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n}_2\ (A_2, B_2, C_2)$ – нормальні вектори площин $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. |

Тобто якщо дві площини паралельні, то паралельними будуть і їх нормальні вектори (***умова паралельності двох площин***), а якщо площини перпендикулярні, то перпендикулярні їх нормальні вектори (***умова перпендикулярності двох площин***).

## 6. Відстань від точки до площини

***Означення. Відстань від точки до площини*** *– це довжина перпендикуляра, опущеного з даної точки на дану площину.*

Враховуючи зазначену раніше формулу відстані від точки до прямої, вважатимемо, що:

| | |
|---|---|
| ***Відстань від точки*** $M_0\left(x_0, y_0\right)$ ***до прямої*** $Ax+By+C=0$ : $$d=\frac{\left\|Ax_0+By_0+C\right\|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$ | ***Відстань від точки*** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ***до площини*** $Ax+By+Cz+D=0$: $$d=\frac{\left\|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right\|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad (5.9)$$ |

Краще розуміння поняття, що розглядається, можна отримати, розглянувши рисунок 5.4. Нехай дано точку $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ і площину $\alpha$ : $Ax+By+Cz+D=0$.

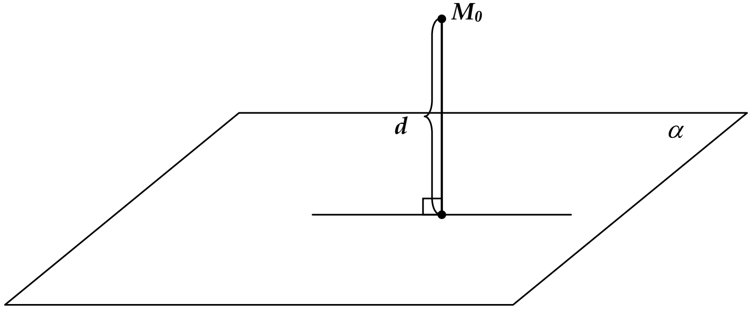



Рис. 5.4

**Завдання 56.** Знайдіть відстань від точки $M_0$ (2; -1; 3 ) до площини $3x - 4z - 18 = 0$.

*Розв'язання*

Користуючись формулою (5.9), знайдемо відстань від даної точки до даної площини:

$$d = \frac{|3 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) - 4 \cdot 3 - 18|}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2}} = \frac{|-24|}{5} = \frac{24}{5} \approx 4{,}8 .$$

**Відповідь:** 4,8 лін.од.

## 7. Канонічні і параметричні рівняння прямої у просторі

З канонічними та параметричними рівняннями прямої на площині ми ознайомилися для вивчення попередньої теми. Міркуючи за аналогією, робимо припущення:

| | |
|---|---|
| ***Канонічне рівняння прямої на площині***: $$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n},$$ де $(x_0, y_0)$ – координати точки, через яку проходить пряма, розміщена на площині; $\vec{s}(m, n)$ – напрямний вектор, колінеарний до прямої. | ***Канонічні рівняння прямої у просторі:*** $$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$ де $(x_0, y_0, z_0)$ – координати точки, яка належить прямій, що розміщена у просторі; $\vec{s}(m, n, p)$ – напрямний вектор прямої. |
| ***Параметричне рівняння прямої на площині:*** $$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases},$$ де $(x_0, y_0)$ – координати точки, через яку проходить пряма, розміщена на площині; $\vec{s}(m, n)$ – напрямний вектор, колінеарний до прямої; $t$ – довільний параметр. | ***Параметричні рівняння прямої у просторі:*** $$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$ де $(x_0, y_0, z_0)$ – координати точки, яка належить прямій, що розміщена у просторі; $\vec{s}(m, n, p)$ – напрямний вектор прямої; $t$ – довільний параметр. |

Обґрунтуємо міркування.

Нехай дано точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і напрямний вектор $\vec{s}(m, n, p)$. Візьмемо на прямій $\ell$, що містить точку $M_0$, довільну точку $M(x, y, z)$ і побудуємо вектор $\overline{M_0M}$ :

$$\overline{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0).$$

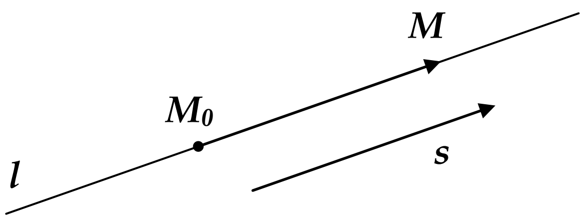



Рис. 5.5

Оскільки $\vec{s}$ і $\overline{M_0M}$ колінеарні (лежать на паралельних прямих), то їх координати пропорційні. Звідси одержуємо ***канонічні рівняння прямої у просторі:***

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{5.10}$$

У рівнянні (5.10) всі дроби прирівняємо до деякого параметра $t$ і виразимо координати x, y, z через t. Наприклад, прирівняємо перший дріб до параметра:

$$\frac{x - x_0}{m} = t; \qquad x - x_0 = mt; \qquad x = x_0 + mt.$$

Проводячи аналогічні міркування стосовно інших дробів з (5.10), одержимо ***параметричні рівняння прямої у просторі:***

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}. \tag{5.11}$$

**Завдання 57.** Запишіть канонічні та параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0$ (2; 0; -1) паралельно до вектора $\vec{s}$ (3; -2; 0).

*Розв'язання*

За даними задачі запишемо канонічні рівняння прямої:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-0}{-2}=\frac{z+1}{0}.$$

Прирівнявши до деякого параметра $t$, отримаємо параметричні рівняння прямої у просторі:

$$\begin{cases} x=2+3t \\ y=0-2t \\ z=-1+0t \end{cases}, \qquad \begin{cases} x=2+3t \\ y=-2t \\ z=-1 \end{cases}.$$

**Відповідь:** $\begin{cases} x=2+3t \\ y=-2t \\ z=-1 \end{cases}.$

## <u>8. Рівняння прямої, що проходить через дві точки у просторі. Кут між двома прямими</u>

Точка у просторі задається трьома компонентами на відміну від точки на площині. Тому:

| ***Рівняння прямої, яка проходить через дві точки*** $M_1(x_1, y_1),\ M_2(x_2, y_2)$: | ***Рівняння прямої, що проходить через дві точки*** $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ***у просторі***: |
|---|---|
| $$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$ | $$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \quad (5.12)$$ |

Якщо дано дві прямі, задані канонічними рівняннями:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \qquad \text{і} \qquad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2},$$

то ***кут між двома прямими у просторі*** визначається за формулою:

$$\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}=0\,. \qquad (5.13)$$

## 9. Кут між прямою і площиною. Точка перетину прямої і площини

***Означення. Кутом між прямою і площиною*** *називається менший із двох кутів між прямою та проекцією прямої на площину.*

Кут між прямою:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \qquad (5.14)$$

і площиною

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (5.15)$$

визначається за формулою:

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\,. \qquad (5.16)$$

Для того, щоб знайти ***точку перетину даної прямої і площини,*** необхідно розв’язати систему рівнянь даної прямої і площини. Спочатку перейдемо у формулі (5.14) до параметричних рівнянь та приєднаємо в систему рівняння площини:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases} . \qquad (5.17)$$

**Завдання 58.** Знайдіть точку перетину прямої і площини, якщо $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-2}$ та $3x - y + z + 7 = 0$.

*Розв'язання*

Користуючись формулою (5.17), знайдемо:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = -1 - 2t \\ 3x - y + z + 7 = 0 \end{cases} .$$

Підставимо відомі вже значення для $x, y, z$ у рівняння площини та отримаємо:

3 (1+2t)-3t+(-1–2t)+7=0.

Розв'язавши дане рівняння відносно параметра t=-9, матимемо:

$$x = 1 - 2 \cdot 9 = -17;$$

$$y = 3 \cdot (-9) = -27;$$

$$z = -1 + 2 \cdot 9 = 17.$$

**Відповідь:** M (-17; -27; 17 ).

**У результаті вивчення теми необхідно:**

| ***знати*** | ***вміти*** |
|---|---|
| - загальне рівняння площини та його окремі випадки;<br>- різновиди рівнянь прямої лінії в просторі;<br>- формулу кута між площинами, відстані від точки до площини та точки перетину прямої і площини. | - застосовувати знання з аналітичної геометрії до дослідження властивостей геометричних фігур;<br>- застосовувати вивчені формули та властивості до розв'язування задач на дослідження найраціональнішим способом (таким, що потребує менших затрат часу, зусиль та швидше приводить до шуканого результату). |

## Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення нормального вектора площини.
2. Запишіть рівняння прямої, що проходить через дану точку, перпендикулярно до даного вектора.
3. Виведіть загальне рівняння площини.
4. Як записати рівняння координатних площин у просторі, користуючись загальним рівнянням площини?
5. Запишіть рівняння площини у відрізках на осях.
6. Як записати рівняння площини, що проходить через три точки?
7. Сформулюйте означення кута між двома площинами та запишіть формули для його знаходження.
8. У чому полягають умови паралельності та перпендикулярності площин?
9. Запишіть канонічні рівняння прямої у просторі.
10. Як здійснити перехід від канонічних до параметричних рівнянь прямої у просторі?
11. Запишіть параметричні рівняння прямої у просторі.
12. Як знайти відстань від точки до площини?
13. Запишіть рівняння прямої, що проходить через дві точки у просторі.
14. За якою формулою обчислюється кут між двома прямими у просторі?
15. Сформулюйте означення кута між прямою і площиною та запишіть формулу для його обчислення.
16. Як знайти точку перетину прямої з площиною?

# ТЕМА 06. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

***План***

1. *Коло.*
2. *Еліпс.*
3. *Параметричні рівняння кола і еліпса.*
4. *Гіпербола.*
5. *Парабола.*
6. *Загальне рівняння лінії другого порядку і її зведення до канонічного виду.*
7. *Застосування ліній другого порядку до розв'язування задач економічного змісту.*

*Основні поняття та твердження:* коло, рівняння кола, еліпс, фокус, велика і мала осі, ексцентриситет еліпса, параметричні рівняння, гіпербола, дійсна і уявна осі, рівностороння гіпербола, ексцентриситет гіперболи, парабола, директриса, загальне та канонічне рівняння лінії другого порядку.

Введемо спочатку поняття лінії другого порядку.

***Означення.*** ***Лінія другого порядку*** *– це множина точок, координати яких задовольняють рівняння виду:*

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0, \qquad (6.1)$$

*де коефіцієнти* $a, b, c, d, e, f$ *– дійсні числа, причому хоча б одне з чисел* $a, b, c$ *відмінне від нуля, тобто*

$$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$$

До ліній другого порядку належать: коло, еліпс, гіпербола, парабола. Їх можна отримати як лінії перерізу кругового конуса площиною, тому їх інколи називають конічними перерізами.

## <u>1. Коло</u>

***Означення.* *Колом*** *називається множина точок площини, відстані від яких до заданої точки площини (**<u>центр кола)</u>** дорівнюють сталому числу (**<u>радіусу</u>**).*

Нехай центр кола знаходиться в точці $C(x_{0,}, y_0)$, а відстань від будь-якої точки $M(x, y)$, що лежить на колі до центра C, дорівнює R.

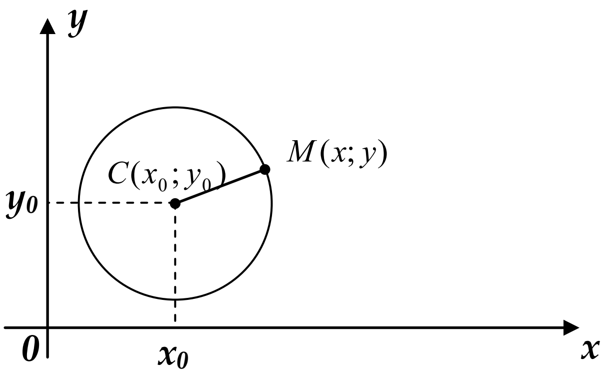



Рис. 6.1

Знайдемо відстань від центра кола до довільної точки $M$ :

$$CM = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = d\ .$$

Згідно з означенням кола маємо $d = R$, тому $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$ або

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \qquad (6.2)$$

***Це рівняння кола з центром у точці*** $C(x_0, y_0)$.

Якщо центр кола знаходиться в початку координат, тобто $C(0;0)$, то рівняння кола набуде вигляду:

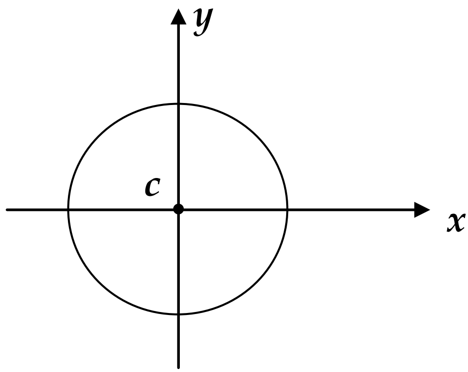



Рис. 6.2

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad . \tag{6.3 }$$

Це є ***рівняння кола з центром у початку координат*** або ***канонічне рівняння кола.***

Піднесемо обидві частини рівності (6.2) до квадрата:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = R^2;$$
$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0.$$

Введемо позначення: $-2a = A; -2b = B; a^2 + b^2 - R^2 = C$. Отримаємо ***загальне рівняння кола***:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0. \tag{6.4}$$

**Завдання 59.** Запишіть рівняння кола з центром у початку координат і радіусом $R = 3$ .

*Розв'язання*

Користуючись формулою (6.3), матимемо $x^2 + y^2 = 9$ .

**Відповідь:** $x^2 + y^2 = 9$ .

**Завдання 60.** Дослідіть, яке рівняння має коло, якщо відомі координати кінцевих точок одного з його діаметрів: A (2; 0); B (-4; 6).

*Розв'язання*

Діаметр – це 2 радіуси. Тоді центр кола знаходиться в точці – середині прямої AB. Знайдемо координати середини відрізка:

$$x = \frac{2-4}{2} = -1; \; y = \frac{0+6}{2} = 3.$$

Отже, центр знаходиться в точці C (-1; 3 ). Тоді

$$AC = CB = R = \sqrt{(-1-2)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}.$$

Користуючись рівнянням (6.2), маємо:

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 18.$$

**Відповідь:** $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 18$ .

## 2. Еліпс

***Означення. Еліпсом*** *називається множина всіх точок площини, сума відстаней яких від двох даних точок цієї площини, що називаються* ***фокусами,*** *є величина стала і дорівнює 2a.*

Розмістимо на площині дві точки $F_1, F_2$ (фокуси еліпса) так, щоб початок прямокутної системи координат ділив відстань між ними навпіл.

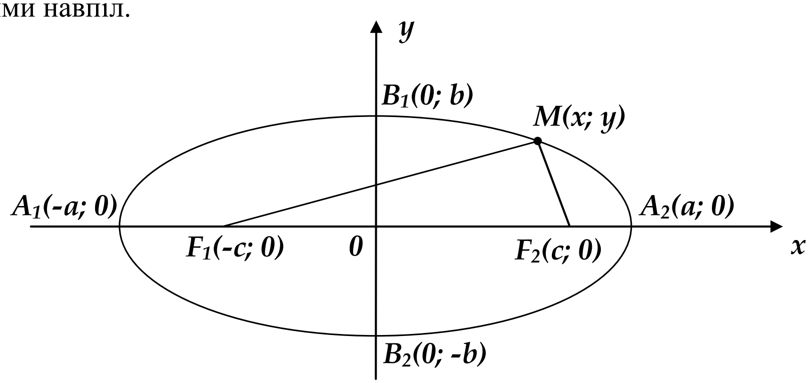



Рис. 6.3

Позначимо $F_1F_2 = 2c$. Тоді $F_1$ (-c, 0 ), $F_2$ (c, 0 ). Нехай $M(x; y)$ – довільна точка площини і

$$F_1M + F_2M = 2a. \tag{6.5}$$

Причому, за означенням еліпса $2a > 2c$, тому і $a > c$. Оскільки

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \text{і} \quad F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

то, користуючись рівністю (6.5), отримаємо:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Розв’язавши дане ірраціональне рівняння і ввівши позначення $a^2 - c^2 = b^2$, отримаємо рівняння:

$$x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2.$$

Поділивши обидві частини рівності на $a^2b^2$, отримаємо ***канонічне рівняння еліпса з центром в початку координат:***

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{в^2} = 1, \tag{6.6}$$

де $a, в$ – відповідно велика та мала півосі еліпса, велика вісь дорівнює $2a$, мала вісь дорівнює $2в$.

Якщо центр еліпса знаходиться в точці С ($x_0, y_0$), а осі еліпса паралельні осям координат, то отримаємо рівняння еліпса з центром у довільній точці С:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{в^2} = 1. \tag{6.7}$$

Якщо центр еліпса знаходиться в початку координат, то осі координат є осями симетрії еліпса. В цьому випадку еліпс перетинає осі координат у точках А($a$,0), В(0,$-в$), С$(-a,0)$, Д$(0,в)$.

***Означення.*** *Точки перетину еліпса з осями координат називають* ***вершинами еліпса.***

***Означення.*** *Міра відхилення еліпса від кола характеризується величиною* ***е****, яка називається* ***ексцентриситетом еліпса*** *і дорівнює відношенню половини його фокальної відстані до довжини більшої півосі:*

$$e = \frac{c}{a}, \tag{6.8}$$

*причому* $0 \le e \le 1$*, оскільки* $0 \le c < a$.

Якщо *е=0*, то еліпс вироджується в коло. Якщо $e \to 1$, то еліпс вироджується у відрізок. Для еліпса має місце формула:

$$c^2 = a^2 - в^2. \tag{6.9}$$

**Завдання 61.** Відстань між фокусами 2с=8, а велика вісь $2a$=10. Запишіть рівняння еліпса.

*Розв'язання*

За умовою задачі $2a$=10, отже, $a$=5; 2с=8, тому с=4. Використовуючи рівність (6.9), отримаємо $в^2 = a^2 - c^2$. Отже,

$$в^2 = 25 - 16 = 9, \qquad в = 3.$$

Тоді на основі рівності (9.6) можна стверджувати , що рівняння еліпса буде:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

**Відповідь:** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

## 3. Параметричні рівняння кола і еліпса

Нехай у прямокутній системі координат задано коло $x^2 + y^2 = R^2$ (рис. 6.4). Кут між віссю $Ox$ і радіус – вектором $\overline{OM}$ позначимо через *t*. Точка $M(x; y)$ лежить на колі тоді і тільки тоді, коли параметричне рівняння еліпса:

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}. \qquad (6.10)$$

Це ***параметричні рівняння кола.***

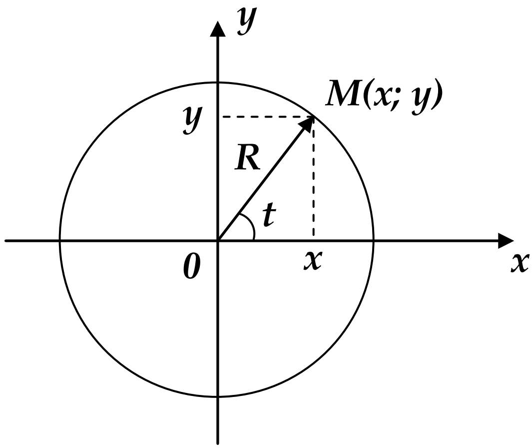



Рис. 6.4

Для еліпса будемо мати такі ***параметричні рівняння еліпса***:

$$\begin{cases} x = a\,\cos\,t \\ y = b\,\sin\,t \end{cases}. \qquad (6.11)$$

## 4. Гіпербола

> ***Означення. Гіперболою*** *називається множина точок площини, модуль різниці відстаней яких від двох даних точок цієї площини, що називаються фокусами, є величина стала менша відстаней між фокусами.*

Виконуючи перетворення аналогічні, як і при написанні рівняння еліпса, та враховуючи, що $a < c$ і $\left|MF_1 - MF_2\right| = 2a$, отримаємо рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{в^2} = 1, \qquad (6.12)$$

де $a$ – дійсна, $в$ – уявна півосі гіперболи. Це ***канонічне рівняння гіперболи з центром в початку координат*** (рис. 6.5).

Якщо центр гіперболи знаходиться у точці С $\left(x_0, y_0\right)$, а осі гіперболи паралельні координатам, то ***канонічне рівняння гіперболи з центром у довільній точці*** запишеться так:

$$\frac{\left(x-x_0\right)^2}{a^2}-\frac{\left(y-y_0\right)^2}{в^2}=1. \qquad (6.13)$$

Гіпербола складається із двох віток (лівої і правої) і має дві асимптоти, рівняння яких:

$$y_{1,2}=\pm\frac{в}{a}x. \qquad (6.14)$$

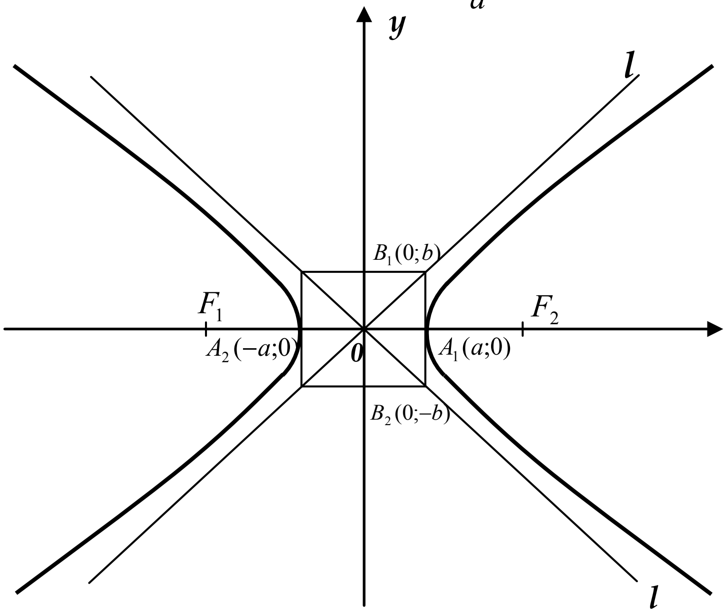



Рис. 6.5

Осі симетрії називаються ***осями гіперболи***, точка перетину осей – ***центр гіперболи***. Величини $a$, $в$, $c$ зв'язані співвідношенням:

$$c^2=a^2+в^2. \qquad (6.15)$$

Гіпербола перетинає вісь ОХ у точці $\left(-a,0\right)$ і $\left(a,0\right)$. Ці точки називаються ***вершинами гіперболи.*** Якщо $a=в$, то гіпербола називається ***рівносторонньою*** і її рівняння буде:

$$x^2-y^2=a^2. \qquad (6.16)$$

***Означення.*** ***Ексцентриситетом*** *гіперболи називають відношення половини фокальної відстані до довжини її дійсної півосі:*

$$e = \frac{c}{a},$$

*причому* $e > 1$.

***Означення.*** *Прямі* $x = \pm\frac{a}{e}$, *де* $a$ *– дійсна піввісь гіперболи, а* $e$ *– її ексцентриситет, називаються* ***директрисами гіперболи***.

**Завдання 62.** Запишіть рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі *OX* симетрично осям координат, якщо:

1) дійсна вісь $2a$ =8, а відстань між фокусами 2c=10;

2) якщо рівняння асимптот гіперболи $y = \pm\frac{2}{5}x$ і уявна вісь $2в = 8$.

*Розв'язання*

1) Оскільки $c^2 = a^2 + в^2$, то $в^2 = c^2 - a^2$. Підставимо відомі значення:

$$в^2 = 25 - 16 = 9, \text{ тобто } в = 3.$$

Тоді рівняння гіперболи запишеться у вигляді: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

2) Якщо рівняння асимптот гіперболи $y = \pm\frac{2}{5}x$ і уявна вісь $2в = 8$.

Маємо $\frac{в}{a}=\frac{2}{5}$. Тоді $\frac{4}{a}=\frac{2}{5}$, тому $a=10$. Підставимо у рівняння гіперболи отримані значення, що дозволяє записати шукане рівняння:

$$\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{16}=1.$$

**Відповідь:** 1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{16}=1$.

## 5. Парабола

***Означення. Параболою*** *називається множина точок площини, рівновіддалених від однієї точки, яка називається фокусом, і прямої, що називається* ***директрисою****.*

Для того, щоб одержати рівняння параболи, розмістимо фокус $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ на осі ОХ, а рівняння директриси запишемо у вигляді:

$$x=-\frac{p}{2}, \tag{6.17}$$

де $p$ – параметр параболи і це відстань від фокуса до директриси.

Тоді, використовуючи означення параболи, одержимо її рівняння:

$$y^2=2\,p\,x. \tag{6.18}$$

Це є ***рівняння параболи з центром у початку координат, і вітками, що симетричні ОХ та направлені вправо.***

Випадки розміщення параболи зображено на рисунках 6.6 – 6.9.

Якщо ***вершина параболи знаходиться у точці C*** $\left(x_0, y_0\right)$**,** а вісь симетрії параболи паралельна одній із осей координат, то рівняння будуть мати вигляд:

$$\begin{array}{ll} \left(y-y_0\right)^2 = 2p\left(x-x_0\right) & \left(x-x_0\right)^2 = 2p\left(y-y_0\right) \\ \left(y-y_0\right)^2 = -2p\left(x-x_0\right); & \left(x-x_0\right)^2 = -2p\left(y-y_0\right). \end{array} \tag{6.19}$$

Після піднесення до квадрата і спрощення рівнянь (6.19) дістанемо:

$$y = Ax^2 + Bx + C, \tag{6.20}$$

що також є рівнянням параболи з центром у довільній точці та віссю симетрії, яка паралельна осі $Oy$.

**Завдання 63.** Запишіть рівняння параболи, якщо віссю симетрії є вісь OX, вітки параболи направлені вліво, вершина знаходиться у початку координат і параметр p=6.

*Розв'язання*

Користуючись умовою задачі, можна записати рівняння параболи:

$$y^2 = -12x.$$

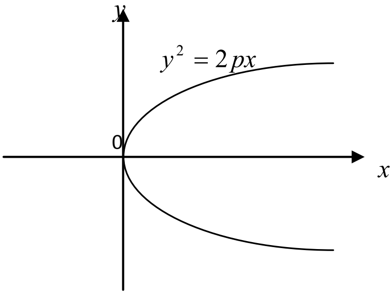



Рис. 6.6

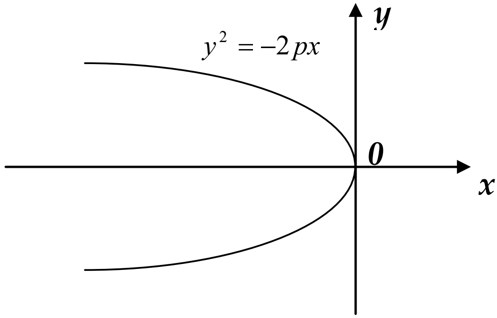



Рис. 6.7

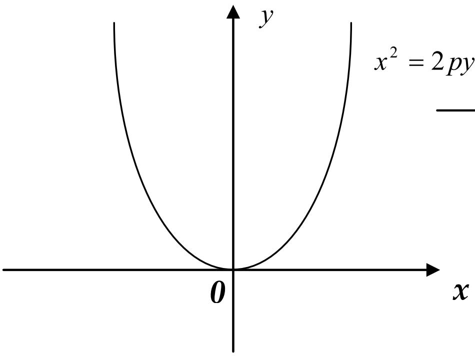



Рис. 6.8

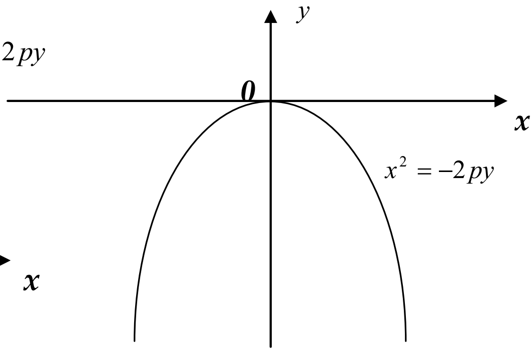



Рис. 6.9

**<u>6. Загальне рівняння лінії другого порядку і її зведення до канонічного виду</u>**

Загальне рівняння лінії другого порядку має вигляд:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0\,.$$

Якщо у цьому рівнянні $c$ =0, то його можна звести до канонічного рівняння:

- кола ( $a = b$ );
- еліпса $(a \cdot b > 0)$;
- гіперболи $(a \cdot b < 0)$;
- параболи ( $a = 0$ або $b = 0$ ).

Зведення загального рівняння лінії другого порядку до канонічного відбувається шляхом виділення повних квадратів.

**Завдання 64.** Встановіть, яка лінія визначається рівнянням $2x^2 + 4x + 3y^2 + 12y - 4 = 0$?

*Розв'язання*

$$2(x^2 + 2x) + 3(y^2 + 4y) - 4 = 0;$$

$$2(x^2 + 2x + 1) - 2 + 3(y^2 + 4y + 4) - 12 - 4 = 0;$$

$$2(x+1)^2 + 3(y+2)^2 - 18 = 0;$$

$$2(x+1)^2 + 3(y+2)^2 = 18;$$

$$\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{6} = 1.$$

**Відповідь:** це є рівняння еліпса з центром у точці С (-1; -2; ), причому $a = 3$, $b = \sqrt{6}$.

**Завдання 65.** Встановіть тип лінії другого порядку $y^2 - 2y - 4x + 8 = 0$ та зведіть її до канонічного вигляду.

*Розв'язання*

Оскільки $a = 0$, то дана лінія є параболою.

$$(y^2 - 2y + 1) - 4x + 8 - 1 = 0;$$

$$(y-1)^2 = 4x - 7$$

$$(y-1)^2 = 4\left(x - \frac{7}{4}\right).$$

**Відповідь:** це парабола з центром у точці $\left(\frac{7}{4}, 1\right)$ та параметром $p$=2.

## 7. Застосування ліній другого порядку до розв'язування задач економічного змісту

Розглянемо дане питання на конкретних прикладах.

**Завдання 66**. Дві фабрики, розташовані у двох містах, віддаль між якими 300 км, виготовляють однотипні вироби. Оптова відпускна ціна на ці вироби однакова на обох фабриках і становить *m* грн. за один виріб. Фабрика *A* має в розпорядженні транспорт якісно кращий, ніж фабрика *B*: витрати на перевезення одного виробу на 1 км для фабрики *A* становлять 10 грн., а для фабрики *B* – 20 грн. Як доцільніше територіально закріпити споживачів до цих фабрик, щоб витрати під час перевезення виробів були найменшими?

*Розв'язання*

Позначимо віддаль від фабрики *A* до споживачів через $S_1$, а від фабрики *B* – $S_2$. Тоді витрати споживачів можна записати за допомогою функцій:

$$f(A) = m + 10S_1; \qquad f(B) = m + 20S_2.$$

Встановимо розміщення споживачів, коли $f(A) = f(B)$:

$$m + 10S_1 = m + 20S_2.$$

Отже, $S_1 = 2S_2$.

Якщо фабрика A знаходиться в деякій точці, наприклад, у початку координат $(0;0)$, то територія радіусом в 1 км обмежується колом, рівняння якого $x^2 + y^2 = 1^2$. З іншого боку, віддаль до споживачів позначено $S_1$. Тому

$$S_1 = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Координати фабрики В, що знаходиться від А на відстані 300 км, будуть $(300;0)$. Отже, за аналогією з попередніми міркуваннями,

$$S_2 = \sqrt{(x-300)^2 + y^2}\ .$$

Враховуючи, що $S_1 = 2S_2$, матимемо:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-300)^2 + y^2}\ ;$$

$$x^2 + y^2 = 4x^2 - 2400x + 360000 + 4y^2\ .$$

Останнє рівняння можна записати у вигляді $(x-400)^2 + y^2 = 200^2$. Це канонічне рівняння кола з центром у точці (400;0) та радіусом 200 км.

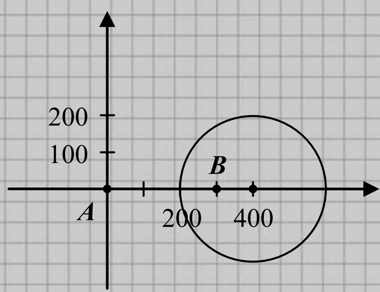



Рис. 6.10

Економічно отримані результати можна трактувати так: споживачеві в межах записаного кола (рис. 6.10) доцільніше придбати вироби на фабриці В, а поза його межами – на фабриці А. Вздовж контуру кола вибір фабрики не має значення.

**Завдання 67.** Підприємство розпочало виробництво верстатів нового типу. Їх випуск відбувається рівномірно, вартість річного обсягу продукції становить 1,5 млн. грн., а термін експлуатації верстатів дорівнює 15 рокам. Дослідіть, як зміниться вартість парку верстатів після 2, 5 та 11 років експлуатації.

*Розв'язання*

Шукану вартість верстатів позначимо через $y$. Згідно з умовою вартість змінюватиметься в залежності від часу експлуатації $t$, тобто є функцією по часу: $y = y(t)$. Зрозуміло, що в момент початку виробництва верстатів час дорівнює нулю ($t = 0$) і вартість виробництва також рівна нулю. По закінченні деякого часу експлуатації вартість парку верстатів становить $1500000t$. Проте фактично вартість є меншою, адже за цей час відбулося фізичне спрацювання.

Рівномірний випуск верстатів вказує на те, що в часовому проміжку $(0;t)$, який розглядається, одночасно працюють як ті верстати, які були виготовлені на початку періоду, так і ті, що вводилися в експлуатацію пізніше. Вартість останніх є меншою за вартість перших, навіть враховуючи спрацювання. Оскільки верстати впроваджувалися в експлуатацію щорічно, то середній вік верстата становить $\dfrac{t}{2}$.

Тоді річне спрацювання буде:

$$\frac{1500000t}{15} \cdot \frac{t}{2} = 50000t^2 .$$

Таким чином, фактична вартість парку верстатів у $t-му$ році буде дорівнювати різниці вартості та річного спрацювання, тобто

$$y = y(t) = 1500000t - 50000t^2 .$$

Отримане рівняння є рівнянням параболи із зсуненою вершиною. Якщо порівняти його (9.20), то побачимо, що $A = -50000$, $B = 1500000$, $C = 0$.

Надавши конкретних значень змінній $t$, матимемо:

- за час $t=2$ роки фактична вартість парку верстатів дорівнюватиме $y(t)=1500000\cdot 2-50000\cdot 2^2=2800000=2{,}8$ млн. грн. у той час, як вартість їх була 3 млн. грн. Тобто річне спрацювання відповідає сумі в 200 тис. грн.

- при $t=5$ років фактична вартість $y(t)=1500000\cdot 5-50000\cdot 5^2=6250000=6{,}25$ млн. грн. на відміну від початкової вартості 7,5 млн. грн. Річне спрацювання дорівнює 1,25 млн. грн.;

- при $t=11$, $y(t)=1500000\cdot 11-50000\cdot 11^2=10450000=10{,}45$ млн. грн., а сума спрацювання 6,05 млн. грн.

**У результаті вивчення теми необхідно:**

| ***знати*** | ***вміти*** |
|---|---|
| - означення та канонічні рівняння ліній другого порядку: кола, еліпса, гіперболи та параболи;<br>- умови, які допомагають визначати вид лінії другого порядку. | - визначати параметри та координати фокусів еліпса, гіперболи, параболи, їх ексцентриситети;<br>- записувати канонічні рівняння кривих другого порядку;<br>- будувати криві другого порядку за їх канонічним рівнянням;<br>- визначати вид лінії другого порядку за її загальним рівнянням;<br>- зводити загальне рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду шляхом виділення повного квадрата;<br>- використовувати отримані знання з теми для розв'язування задач економічного змісту. |

## Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення лінії другого порядку.
2. Що називається колом?
3. Запишіть рівняння кола з центром у початку координат та у довільній точці. Проілюструйте за допомогою малюнка.
4. Запишіть загальне рівняння кола.
5. Яка фігура називається еліпсом? Побудуйте еліпс у декартовій системі координат.
6. Запишіть рівняння еліпса з центром у початку координат та у довільній точці.
7. Які точки називаються вершинами еліпса?
8. Введіть поняття ексцентриситету еліпса та запишіть співвідношення між величинами, що позначають велику та малу півосі еліпса і піввідстань між фокусами.
9. Запишіть параметричні рівняння кола і еліпса та поясніть формули за допомогою малюнка.
10. Сформулюйте означення гіперболи та зобразіть її схематично.
11. Запишіть канонічне рівняння гіперболи з центром у початку координат та у довільній точці.
12. Дайте означення осі, вершин, центра, асимптоти та директриси гіперболи.
13. Введіть поняття ексцентриситету гіперболи та запишіть співвідношення між величинами, що позначають дійсну і уявну півосі гіперболи і піввідстань між фокусами.
14. Сформулюйте означення параболи та запишіть її рівняння з центром у початку координат та у довільній точці для всіх випадків направлення віток параболи.
15. Як загальне рівняння лінії другого порядку звести до канонічного виду однієї з конкретних ліній?

## Завдання для самостійного розв'язання

***Рівень 1***

**67.** Задано точки $M_1(2;4), M_2(-2;0)$. Знайдіть відстань між ними та проілюструйте задачу графічною побудовою.

**68.** Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M(3;-5)$ перпендикулярно до вектора $\overline{n} = (4;2)$.

**69.** Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M(2;2)$ перпендикулярно до вектора $\overline{AB}$, початок і кінець якого задано точками $A(1;-3), B(6;-5)$.

**70.** Загальне рівняння прямої $4x - 3y + 9 = 0$ подайте як рівняння з кутовим коефіцієнтом та у відрізках на осях.

**71.** Запишіть рівняння прямої, що відтинає на осях координат відрізки $a = -\dfrac{1}{2}; b = 8$.

**72.** Складіть рівняння прямої, що проходить через точки $A(2;1), B(-2;12)$.

**73.** Знайдіть кут між прямими $x - 2y + 5 = 0; x - y = 0$.

**74.** Дослідіть, як розміщена у прямокутній декартовій системі координат площина, що визначається рівнянням $5x = 0$?

**75.** Складіть рівняння площини, що проходить через точки:
а) $A(5;-7;9), B(-1;3;0), C(-2;-3;1)$;
б) $M_1(2;-1;2), M_2(4;3;7), M_3(1;-1;-1)$.

**76.** Знайдіть кут між площинами:

а) $7x + y - 10z = 0$ і $x + y + z + 1 = 0$;

б) $x - y - 2z + 3 = 0$ і $3x - y + z - 4 = 0$.

**77.** Знайдіть відстань від точки $K(2;-1;-1)$ до площини $x - y - z + 2 = 0$.

**78.** Складіть рівняння кола з центром у точці $(-2;-5)$ і радіусом $R = 3$.

**79.** Складіть рівняння кола з центром у точці $(-1;4)$, що проходить через точку $(3;5)$.

**80.** Складіть рівняння еліпса, якщо:

а) відстань між фокусами дорівнює 6 і більша вісь дорівнює 10;

б) $e = \dfrac{1}{2}$, а велика піввісь $a = 2$;

в) фокальна відстань дорівнює 8, а ексцентриситет $\dfrac{1}{2}$.

**81.** Складіть рівняння гіперболи, якщо:

а) $c = 3; e = \dfrac{3}{2}$; б) $b = 4; c = 5$.

***<u>Рівень 2</u>***

**82.** Знайдіть напрямні вектори для таких прямих:

а) $7x + 9y + 10 = 0$; в) $y = -4x + 1$;

б) $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{6}$; г) $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t + 8 \end{cases}$.

**83.** Побудуйте пряму, що проходить через точку (5;0) перпендикулярно до прямої $-3x + 2y - 6 = 0$.

**84.** Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M(-1;2)$ паралельно до прямої $3x - 2y + 5 = 0$.

**85.** Складіть рівняння прямої, що проходить через точку (-3;-2) і утворює з віссю $Ox$ кут:

а) $arctg(-3)$; б) $45^{\circ}$.

**86.** Визначте відстань від точки $M(2;1)$ до прямої $x-2y+4=0$ та до прямої $\frac{x}{3}+\frac{y}{8}=1$.

**87.** Дано вершини трикутника $A(2;-2), B(-2;5), C(2;-7)$. Знайдіть:

а) довжини всіх сторін трикутника;
б) рівняння всіх сторін трикутника;
в) рівняння та довжину висоти, опущеної з точки А;
г) кут В у радіанах з точністю до двох знаків.

**88.** Дослідіть, чи існує на прямій $2x+y-6=0$ точка, рівновіддалена від точок $A(3;5), B(2;6)$. У випадку позитивної відповіді запишіть її координати.

**89.** Дослідіть, чи належать точки $A(-2;3)$ та $B(0;1)$ прямій $3x-y+7=0$?

**90.** Перейдіть від загального рівняння площини до рівняння у відрізках на осях:

а) $2x+y-7z+1=0$; б) $3x+4y-2z-3=0$.

**91.** Знайдіть рівняння площини, яка проходить через точку $F(2;-1;-1)$ і перпендикулярна до площини $2x+y+3z-2=0$.

**92.** Запишіть рівняння площини, що проходить через точку $O(2;3;-4)$ паралельно до площини $x-5y+3z-2=0$.

**93.** Відомі точки $A(4;4;10), B(4;10;2), C(2;8;4), D(0;6;4)$. Знайдіть косинус кута між площинами $ABC$ та $ABD$.

**94.** Знайдіть відстань від точки $(4;3;0)$ до площини, що проходить через точки $(1;3;0), (4;-1;2), (3;0;1)$.

**95.** Напишіть рівняння площини, яка проходить через точку $M(-4;0;4)$ і відтинає на осях $Ox$ та $Oy$ відрізки 4 і 3.

**96.** Дослідіть, чи перетинається площина $2x+3y+4z-12=0$ з площинами

$$3x-6y+5z+4=0,\ 6x+9y+12z-12=0 \text{ і}$$
$$6x+3y+10z-12=0?$$

Якщо так, то знайдіть координати точок перетину.

**97.** Складіть рівняння кола, кінці діаметра якого мають координати $(0;3);(6;-7)$.

**98.** Складіть рівняння кола, що проходить через точки з координатами $(2;8);(4;-6)$.

**99.** Запишіть рівняння еліпса, якщо дві його вершини знаходяться в точках (-5;0), (5;0), а фокуси – в точках (-3;0), (3;0).

**100.** Дано рівняння гіперболи $\dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{256}=1$. Запишіть рівняння її асимптот.

**101.** Задано рівняння гіперболи $\dfrac{x^2}{14}-\dfrac{y^2}{22}=1$. Знайдіть координати її фокусів та відстань між ними.

**102.** Вкажіть тип лінії другого порядку та зведіть її до канонічного вигляду:

а) $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$;

б) $x^2-y^2+4x-10y-25=0$;

в) $2y^2+16y-x+48=0$;

г) $x^2-6x-4y+29=0$;

д) $5x^2-4y^2+30x+8y+21=0$.

***Рівень 3***

**103.** Знайдіть точку, рівновіддалену від точок з координатами $(-4;3)$, $(4;2)$, $(1;-1)$.

**104.** Серед прямих, що задані рівняннями $3x+2y-5=0$, $y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}$, $4x+6y+5=0$, $4x-6y+9=0$, назвіть паралельні та перпендикулярні.

**105.** Дослідіть, які з прямих, що задані рівнянням $A(x-1)+B(y-3)=0$, перпендикулярні до вектора:

а) $\overline{n}(-1;5)$; б) $\overline{n}=-3\overline{j}$; в) $\overline{n}=2\overline{i}$; г) $\overline{n}=2\overline{i}-3\overline{j}$?

**106.** Дослідіть, при яких значеннях параметра "а" дані прямі паралельні:

а) $3x-2y+11=0$ і $ax-4y+3=0$;

б) $3y+5x-4=0$ і $ax+6y-7=0$.

**107.** Дослідіть, при якому значенні параметра наступні пари прямих перпендикулярні:

а) $x+by-2=0$ і $2x+3y-7=0$;

б) $bx-4y+3=0$ і $y-2x+5=0$.

**108.** Дослідіть взаємне розміщення наступних пар прямих (у випадку їх перетину знайти точки перетину):

а) $3x-2y-4=0$ і $x+3y-5=0$;

б) $x-5y+7=0$ і $3x-15y+4=0$;

в) $5x-3y+9=0$ і $6x+10y+13=0$;

г) $2x+7y-3=0$ і $6x+21y-9=0$;

д) $2x+3y-12=0$ і $x-y-1=0$;

е) $x-2y-7=0$ і $4x+2y-3=0$.

**109.** Визначте, які координати мають вершини трикутника, рівняння сторін якого

$2x - y - 1 = 0$; $x - 2y + 3 = 0$; $2x + 3y - 5 = 0$.

Виконайте розв'язання аналітично і графічно.

**110.** Дано рівняння сторін трикутника $ABC$: ($AB$) $7x + 4y + 9 = 0$; ($BC$) $x - 8y + 27 = 0$; ($AC$) $2x - y - 6 = 0$.

Дослідіть, які значення мають внутрішні кути трикутника та встановіть його тип.

**111.** Дослідіть, які координати мають вершини паралелограма, дві сторони та одна з діагоналей якого відповідно задані рівняннями: $8x + 3y + 1 = 0$, $2x + y - 1 = 0$, $3x + 2y + 3 = 0$.

**112.** Дослідіть, при якому значенні параметра $k$ пряма $y = kx + 9$ проходить через точку перетину прямих $x - y + 5 = 0$ і $x + 2y + 2 = 0$?

**113.** Дослідіть, чи є пряма $x - y + 3 = 0$ бісектрисою одного з кутів, що утворюють прямі $4x - 3y + 11 = 0$ і $3x - 4y + 10 = 0$?

**114.** Доведіть аналітично, що медіани трикутника перетинаються в одній точці.

**115.** Дослідіть, якими будуть вартість виробленої продукції P та затрати робочого часу T, якщо відомо вектори цін $\overline{p} = (30;15;40;20)$, затрат робочого часу $\overline{t} = (5;10;7;12)$, асортименту $\overline{q} = (20;40;60;10)$.

**116.** Витрати виробництва на 20 одиниць товару складають 2000 грн., на 60 одиниць – 3000 грн. Дослідіть, які витрати чекають на виробника 30 одиниць товару, врахувавши, що витрати залежать від обсягу продукції лінійно.

**117.** Валова продукція на 1 га сільськогосподарських угідь за чотири роки збільшилась на 24%. Складіть рівняння прямої, яка відображає зміну валової продукції на 1 га протягом чотирьох років за умови, що валова продукція у відсотках змінюється пропорційно часу.

**118.** Транспортні витрати перевезення одиниці вантажу ($y$) залізничним та автомобільним транспортом на відстань ($x$) знаходять за формулами:

$y=-\dfrac{1}{2}x+10$ та $y=x+5$, де ($x$) вимірюється десятками км. Визначте рентабельність транспортного постачання.

**119.** Витрати під час перевезення вантажу двома видами транспорту подаються у вигляді формул $y=0{,}15x+25$; $y=0{,}1x+30$, де $x$ – відстань у кілометрах, $y$ – транспортні витрати в грн. Дослідіть, який вид транспорту вигідніше використовувати для перевезення вантажу на 25, 50, 100 і 150 км.

**120.** З допомогою різних технологій виготовлення собівартість партії деталей подано у вигляді формул: $y=2+0{,}2x$ та $y=10+0{,}04x$, де $x$ – кількість деталей у партії, $y$ – собівартість партії деталей у грн. Яка технологія вигідніша для виготовлення деталей? Дослідіть, яка кількість деталей є межею вигідності для двох технологій.

**121.** Дослідіть, чи можна провести через точку $A(4;0;-1)$ пряму так, щоб вона перетинала дві задані прямі $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z-5}{3}$ і $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$.

**122.** Дослідіть взаємне розміщення прямих:

а) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+1}{-4}$ і $\dfrac{x-7}{-6}=\dfrac{y-2}{9}=\dfrac{z}{12}$;

б) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-7}{1}=\dfrac{z-3}{4}$ і $\dfrac{x-6}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$.

**123.** Дано прямі $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-1}{4}$ і $\dfrac{x-3}{a}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-7}{2}$. Дослідіть, при якому значенні параметра $z$ ці прямі перпендикулярні.

**124.** Дано вершини трикутника $ABC$: $A(1;-2;-4)$, $B(3;1;-3)$ і $C(5;1;-7)$. Дослідіть, який вигляд матиме параметричне рівняння висоти, опущеної з вершини $B$ на протилежну сторону?

**125.** Дослідіть, яке значення має найкоротша відстань між прямими: $\frac{x-3}{2}=\frac{y-7}{-2}=\frac{z-1}{3}$ і $\frac{x-5}{2}=\frac{y-8}{0}=\frac{z-2}{-3}$.

**126.** Дослідіть, скільки площин у просторі можна провести через чотири промені, що мають спільну вершину. Розгляньте усі можливі випадки.

**127.** Знайдіть точку перетину площин: $2x-y+3z-9=0$, $x+2y+2z-3=0$, $3x+y-4z+6=0$.

**128.** Дослідіть, чи є площини $3x+4y-z+1=0$ і $x-2y-5z+3=0$ перпендикулярними.

**129.** Дослідіть, при якому значенні параметра $m$ пари рівнянь $3x+4y+mz-26=0$, $4x-3y+4z+1=0$ визначають перпендикулярні площини.

**130.** Дано дві точки $M_1(2;3;4)$ і $M_2(-1;0;1)$. Дослідіть, яке рівняння матиме площина, що проходить через дані точки перпендикулярно до площини $2x+y-z+4=0$.

**131.** Визначте, чи перетинаються дані пряма і площина. Якщо так, то знайдіть координати точки перетину:

а) $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{10}=\frac{z+12}{7}$ і $x-2y+3z-4=0$;

б) $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-8}{4}$ і $2x-y+3z+5=0$.

**132.** Знайдіть точку перетину прямої $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{2}$ і площини $3x+4y+7z-16=0$, а також синус кута між ними.

**133.** Дослідіть, чи паралельна площині $2x+y-x=0$ пряма $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{3}$ і чи лежить на цій площині пряма $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{3}$.

**134.** Дослідіть, чи лежать прямі $\frac{x+49}{48}=\frac{y+37}{37}=\frac{z}{4}$ і $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$ в одній площині.

**135.** Дослідіть, при якому значенні параметра $c$ пряма $\begin{cases} 3x-2y+z+3=0 \\ 4x-3y+4z+1=0 \end{cases}$ паралельна площині $2x-y+cz-2=0$.

**136.** Складіть рівняння кола для таких випадків:

а) центр кола збігається з початком координат, а його радіус дорівнює 6;

б) центр кола збігається з точкою С(5; -3) і радіус дорівнює 17;

в) коло проходить через початок координат і його центр збігається з точкою С(6; -8);

г) коло проходить через точку К(2; 6), а його центр знаходиться в точці С(-1; 2);

д) коло проходить через точки $N_1(-1;5)$, $N_2(-2;-2)$ і $N_3(5;5)$.

**137.** Відстань між двома торговими організаціями дорівнює 6 км. Знайдіть рівняння множини всіх можливих місцезнаходжень баз, які обслуговують ці організації, якщо відомо, що сума відстаней від бази до них повинна бути сталою та дорівнювати 10 км.

**138.** Для рівняння еліпса $9x^2 + 25y^2 = 225$ знайдіть ексцентриситет та рівняння директрис.

**139.** Дано координати точок $A(2;\sqrt{3}); B(-2\sqrt{3};1); R = \sqrt{7}$ – радіус кола з центром у точці $O(0;0)$. Дослідіть, чи існує еліпс, який проходить через дані точки. Якщо так, то складіть його канонічне рівняння та знайдіть точку перетину еліпса з колом.

**140.** Запишіть рівняння гіперболи, якщо її асимптоти задані рівнянням $y = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}x$ і вона проходить через точку (6;-4).

**141.** Складіть рівняння гіперболи з фокусами на осі $Ox$, якщо вона проходить через точки $(-6;-\sqrt{7}); (6\sqrt{2};4)$.

**142.** Дослідіть значення відстані між центрами кіл та складіть рівняння прямих, що проходять через їх центри:

а) $x^2 + y^2 = 16$ і $x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$;

б) $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$ і $x^2 + y^2 - 6y = 0$;

в) $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ і $x^2 + y^2 + 2x - 12y + 1 = 0$.

**143.** Дослідіть вигляд рівняння еліпса, що проходить через точку $A(2;2\sqrt{2})$ і мала вісь якого дорівнює 6, а фокуси розміщені на осі OX симетрично відносно початку координат.

**144.** Дослідіть взаємне розміщення еліпса $4x^2 + 9y^2 = 36$ та прямих:

а) $2x + 3y - 6 = 0$; б) $2x + 3\sqrt{3}y = 12$; в) $y = x - 6$.

У випадку їх перетину знайдіть координати точки перетину.

**145.** Дослідіть, який вигляд матиме рівняння гіперболи, яка має вершини в фокусах, а фокуси – в вершинах еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

**146.** Дослідіть, яку висоту має арка завдовжки 24м, якщо вона має вигляд параболи, рівняння якої $x^2 = -48y$.

**147.** Дослідіть, чи належать точки $M_1(2;-6)$, $M_2(1,5;6)$ параболі $y^2 = 24x$.

**148.** Дослідіть значення довжини відрізка прямої $x + 4y - 28 = 0$, що лежить всередині еліпса $\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{25} = 1$.

**149.** Дослідіть, чи є крива, задана рівнянням $25x^2 + 16y^2 - 50x + 64y - 311 = 0$, еліпсом. У випадку позитивної відповіді знайдіть його півосі, а координати фокусі. Побудуйте дану криву.

**150.** Дослідіть, як розміщена точка $M(-2;1)$ відносно кожного з кіл (всередині, зовні чи на колі):
а) $x^2 + y^2 = 2$; б) $x^2 + y^2 - 5 = 0$; в) $x^2 + y^2 - 8x - 4y = 5$.

**151.** Дослідіть, як розміщена пряма відносно кола (перетинає, дотикається чи проходить повз нього) якщо пряма і коло задані рівняннями:

а) $2x - y - 3 = 0$ і $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 3 = 0$;

б) $x - 2y - 1 = 0$ і $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 5$.

**152.** Дано еліпс $15x^2 + 25y^2 - 375 = 0$. Через фокус проведено перпендикуляр до його більшої осі. Дослідіть значення відстані від точок перетину цього перпендикуляра з еліпсом до фокусів.

**153.** Дослідіть, чи перетинаються парабола $y^2 = 16x$ та пряма $4x - 3y + 8 = 0$. Знайдіть координати точок перетину та проілюструйте дослідження графічно.

**154.** Земля рухається по еліптичній орбіті, в одному із фокусів якої знаходиться Сонце. Обчисліть ексцентриситет земної орбіти, якщо найближча до Сонця точка земної орбіти (перигелій) знаходиться на відстані 147 млн. км від Сонця, а найбільш віддалена від Сонця точка орбіти (афелій) знаходиться на відстані 152 млн. км від нього.

**155.** Дослідженням виявлено, що витрати палива судном на підводних крилах зростають пропорційно квадрату швидкості судна. Знайдіть аналітичну залежність між витратами палива $m$ та швидкістю судна $V$, враховуючи, що $V = 40\,км/год$ витрачено 20 л палива за годину, а також визначте витрати палива за годину при швидкості $60\,км/год$.

**156.** Два однотипних підприємства А і В виробляють продукцію з однією і тією ж відпускною оптовою ціною $m$ за один виріб. Однак автопарк, що обслуговує підприємство А, оснащений новішими та потужнішими вантажними автомобілями. Тому транспортні витрати на перевезення одного виробу складають за 1 км: для підприємства А – 10 грош. од., а для підприємства В – 20 грош. од. Відстань між підприємствами 300 км. Дослідіть, як територіально має бути поділений ринок збуту між двома підприємствами для того, щоб витрати споживача на відвантаження виробів та їх транспортування були мінімальними?

**157.** Компанія виробляє вироби А та продає їх по 2 долари за кожний. Керівництво компанії встановило, що сума $y_B$ загальних щотижневих витрат (у доларах) на виготовлення виробів А кількістю $x$ (тисяч одиниць) має таку закономірність: $y_B = 1000 + 1300x + 100x^2$. Дослідіть щотижневу кількість виготовлення та продажу виробів А, яка забезпечить рівновагу витрат та доходу.

# *Модуль 3.*

# Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних

## ТЕМА 07. ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ

***План***

1. *Функція, її властивості та способи задання. Основні елементарні функції.*
2. *Поняття про виробничі функції в економіці.*
3. *Поняття числової послідовності, приклади числових послідовностей. Границя послідовності.*
4. *Нескінченно малі та нескінченно великі величини, зв'язок між ними.*
5. *Границя функції в точці та на нескінченності. Основні теореми про границі.*
6. *Границя відношення двох многочленів.*
7. *Перша та друга визначні (чудові) границі.*

*Основні терміни та поняття:* функція, множина значень та область визначення функції, елементарна функція, виробничі функції, числова послідовність, члени (елементи) числової послідовності, загальний член послідовності, стала послідовність, границя числової послідовності, збіжна та розбіжна числові послідовності, нескінченно малі та нескінченно великі величини, границя функції в точці та на нескінченності, перша та друга визначні (чудові) границі.

## *СТОРІНКА ІСТОРІЇ*

*Поняття функції має давню історію. Перші кроки на довгому шляху творення загального поняття функції зробили математики Стародавнього Вавилона. Вони склали таблиці обернених значень чисел, їх квадратів і кубів, сум квадратів і кубів чисел. У сучасному розумінні це були таблиці значень функцій* $y = \frac{1}{x}$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^2 + x^3$.

*Довго саме поняття функції не було введене. Навіть у працях Р. Декарта, П. Ферма, І. Ньютона, Г. Лейбніца це поняття носило, по суті, інтуїтивний характер і пов'язувалося або з геометричними, або з механічними уявленнями. Шлях до першого означення проклав Р.Декарт, увівши поняття змінної величини.*

*Наприкінці XVII століття Г. Лейбніц та його учні почали в дуже вузькому розумінні використовувати термін "функція", пов'язуючи його лише з геометричними образами. Вільне ж від геометричної мови означення сформулював у 1718 році Й.Бернуллі: "Функцією змінної величини називається кількість, утворена яким завгодно способом з цієї змінної величини і сталих". Він позначав функцію* $\varphi(x)$. *Це означення у 1755 році уточнив і узагальнив Л. Ейлер: "Коли деякі кількості залежать від інших таким чином, що при зміні останніх і самі вони підлягають зміні, то перші називаються функціями других". В одній із своїх робіт учений навіть розглядав графік функції як криву, яка накреслена "вільним потягом руки". Для позначення функції він використав символ* $f(x)$ *– буква* $f$ *– перша буква латинського слова function – функція.*

*М. Лобачевський, розвиваючи ейлерове означення функції (1834), писав: "Загальне означення вимагає, щоб функцією від* $x$ *називали число, яке дається для кожного* $x$ *і разом з* $x$ *поступово змінюється. Значення функції може бути задане або аналітичним виразом, або умовою, яка дає засіб випробовувати всі числа і вибирати одне з них; або, нарешті, залежність може існувати і залишатися невідомою…". У 1837 році німецький математик П. Діріхле сформулював таке означення: "* $y$ *є функцією від* $x$ *(на відрізку* $a \le x \le b$*), якщо кожному значенню* $x$ *(з цього відрізка) відповідає певне значення* $y$*, причому не має значення, яким чином встановлена ця відповідність – аналітичною формулою, графіком, таблицею або навіть просто словами".*

*Отже, в середині XIX століття після довготривалої полеміки поняття функції звільнилося від форми встановлення відповідності – головний наголос у новому загальному означенні робився на самій відповідності. А вже у другій половині XIX століття після створення теорії множин в означення функції, крім ідеї відповідності, включено ще й ідею множини.*

## 1. Функція, її властивості та способи задання. Основні елементарні функції

***Означення.*** *Змінна величина* $y$ *називається* ***функцією*** *від змінної величини* $x$*, якщо кожному значенню змінної* $x$ *з деякої множини* $X$ *ставиться у відповідність єдине значення* $y$ *з множини* $Y$.

Позначають функцію $y = f(x)$, де $x$ – незалежна змінна (***аргумент***), $y$ – залежна змінна (***функція*** ).

На основі сформульованого означення функції можна стверджувати, що її ***область визначення*** – це множина $X$ (всі ті значення, яких набуває незалежна змінна $x$ і при яких дана функція існує): позначається $D(y)$. Тоді ***множина значень функції*** – це множина $Y$ (всі ті значення залежної змінної $y$, яких вона набуває при всіх значеннях $x$ з області визначення функції): позначається $\mathrm{E}(y)$.

Задати функцію можна декількома способами:

1) **аналітично** – за допомогою формули (наприклад, $y = 2x + 9$, $y = \dfrac{x}{x^2 - 5}$ тощо);
2) **таблично** – найчастіше використовується на практиці – коли в певному порядку вписують значення незалежної змінної ($x_1, x_2, ..., x_n$) та відповідні їм значення залежної змінної ($y_1, y_2, ..., y_n$);
3) **графічно** – за допомогою графіка, що є множиною точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють аргументу функції, а ординати є відповідними значеннями функції;

4) Кожна функція володіє певними властивостями, до яких відносять поняття парності, періодичності, монотонності.

***Означення***. *Функція* $y = f\left(x\right)$ *називається* ***парною (непарною)****, якщо для будь-якого значення x з області визначення функції значення (–x) також належить цій області і виконується умова:*

$$f(-x) = f(x)$$

$$\left(f(-x) = -f(x)\right). \qquad (7.1)$$

Якщо перша умова (про належність області визначення) не виконується, то недоцільно перевіряти другу, а функція, що досліджується, є ***ні парною, ні непарною*** (інша назва – ***індеферентною***).

**Завдання 68**. Дослідіть функцію $f(x) = x^2 - 5$ на парність (непарність).

*Розв'язання*

Областю визначення даної функції є множина всіх дійсних чисел, тобто $D(y) = R$ або $x \in (-\infty;+\infty)$. Тому можна стверджувати, що для будь-якого значення $x$ з області визначення функції значення (–$x$) також належить цій області – перша умова (про належність області визначення виконується).

Перевіримо виконання другої умови, підставивши значення (–$x$) у дану функцію:

$$f(-x) = (-x)^2 - 5 = x^2 - 5 = f(x).$$

Виконання умови $f(-x) = f(x)$ вказує на те, що дана функція є парною.

**Відповідь:** функція $f(x) = x^2 - 5$ парна.

***Означення.*** *Функція* $y = f\left(x\right)$ *називається* ***періодичною*** *з періодом* $T \neq 0$, *якщо для будь-якого значення x з області визначення* $(x+T)$ *і* $(x-T)$ *теж належать області визначення і при цьому виконується рівність:*

$$f(x-T) = f(x) = f(x+T). \qquad (7.2)$$

Часто періодом функції називають її найменший додатній період. Якщо число $T$ – період функції, то число $nT$, де $n \in Z, n \neq 0$, також буде періодом функції.

До монотонних функцій відносять: монотонно зростаючі (монотонно спадні) та строго зростаючі (строго спадні) функції.

***Означення***. *Якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, то її називають* ***монотонно зростаючою:***

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1), \tag{7.3}$$

*а якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції, – то* ***монотонно спадною****:*

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1). \tag{7.4}$$

***Означення***. *Функція* $y = f(x)$ *називається*

| ***строго зростаючою*** | ***строго спадною*** |
|---|---|

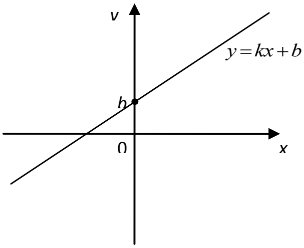
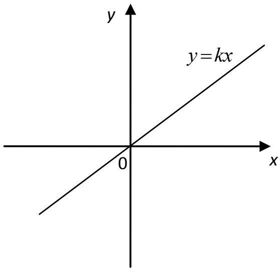
*на деякому проміжку, якщо для будь-яких* $x_2 > x_1$ *з цього проміжку виконується нерівність*

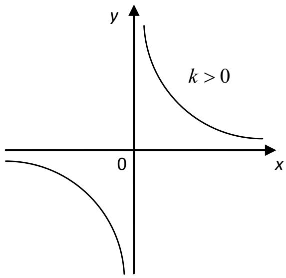
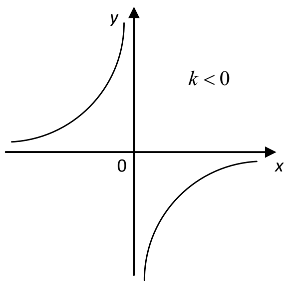
| | |
|---|---|
| $f(x_2) > f(x_1)$ | $f(x_2) < f(x_1)$ |

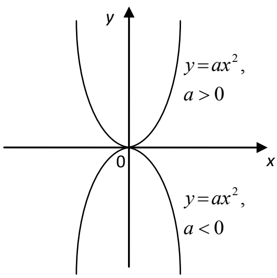
Розглянемо деякі основні елементарні функції (таблиця 7.1).

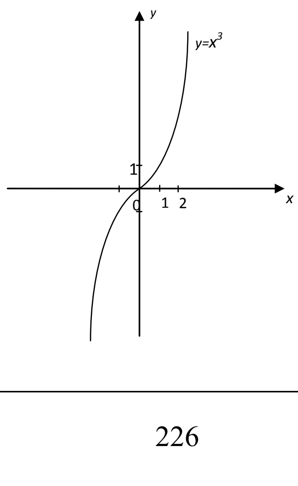
Таблиця 7.1

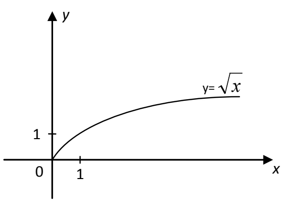
## Основні елементарні функції, їх властивості

| **Функція, задана словесно та аналітично** | **Графічне задання** | **Основні властивості функції** |
|---|---|---|
| Функція виду $y = kx + b$, де $x$ – незалежна змінна, $k, b$ – довільні числа, називається ***лінійною.*** | Графіком є *пряма*<br> | 1) Область визначення лінійної функції $D(y): x \in R$.<br><br>2) При:<br>– $k > 0$, функція зростає;<br>– $k < 0$, функція спадає. |
| При $k \neq 0, b = 0$ функція $y = kx$ задає *пряму пропорційність* | У випадку прямої пропорційності пряма проходить через початок координат (графік симетричний початку координат)<br><br>У випадку $k = 0, b$ – довільне числове значення, відмінне від нуля, графіком є пряма, паралельна осі *Ox* (або збігається з нею). Тобто графік симетричний відносно осі *Oy* | 3) Якщо:<br>– $k \neq 0, b \neq 0$ функція ні парна, ні непарна;<br>– $k \neq 0, b = 0$ функція непарна;<br>– $k = 0, b$ – довільне, функція парна. |

| | | |
|---|---|---|
| Функція $y = \dfrac{k}{x}$, де $x$ – незалежна змінна, число $k \neq 0$ виражає ***обернену пропорційність***. | Графіком є *гіпербола*, що складається з двох віток, розміщених у чвертях:<br>– I та III, якщо $k > 0$;<br><br><br>– II та IV, якщо $k < 0$<br><br> | 1) Областю визначення функції є всі дійсні числа, крім $x = 0$, тобто $D(y)$: $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$. Областю значення є всі дійсні числа, крім $y = 0$, тобто $E(y)$: $y \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.<br><br>2) Функція на множині $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$ спадає при $k > 0$ і зростає при $k < 0$.<br><br>3) Функція непарна. |

<table>
<tr>
<td>Функція $y = x^2$ або $y = ax^2$</td>
<td>Графік функції – парабола, симетрична відносно осі Oy.<br><br>Оскільки при $x = 0$ значення функції також рівне нулю ($y = 0$), то графік проходить через початок координат.<br><br>У випадку $y = ax^2$ вітки параболи напрямлені:<br>– вгору, якщо $a > 0$;<br>– вниз, якщо $a < 0$.<br></td>
<td>1) Область визначення – множина всіх дійсних чисел, тобто $D(y): x \in R$.<br>Область значення – множина невід’ємних чисел, тобто $E(y): y \in [0;+\infty)$.<br><br>2) При $x \in (-\infty;0]$ функція спадає, а при $x \in [0;+\infty)$ – зростає.<br><br>3) Функція парна.</td>
</tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| Функція $y = ax^2 + bx + c$, де $a, b, c$ – дійсні числа, $a \neq 0$ називається ***квадратичною.*** | В даному випадку графіком є також парабола, вершина якої міститься в точці $(x_0; y_0)$, де $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$. Крім того, точки перетину графіка з віссю *Ox* знайдемо при $y = 0$, а з *Oy* – при $x = 0$. | |
| Функція $y = x^3$. | Графіком є *кубічна парабола*, симетрична відносно початку координат.<br><br>Якщо $x = 0, y = 0$, графік проходить через початок координат.<br><br><br> | 1) Області визначення та значення функції – множина всіх дійсних чисел.<br><br>2) Функція зростаюча на всій множині визначення.<br><br>3) Функція непарна. |

| | | |
|---|---|---|
| Функція $y=\sqrt{x}$. | Графіком є вітка параболи, розміщена у I чверті (оскільки $x$ та $y$ невід'ємні значення).<br><br>Якщо $x=0$, то і $y=0$, тобто графік проходить через початок координат.<br><br> | 1) Області визначення і значення функції – множина невід'ємних чисел, тобто $x\in[0;+\infty)$ і $y\in[0;+\infty)$.<br><br>2) Функція зростає на всій області визначення.<br><br>3) Функція не належить ні до парних, ні до непарних функцій. |

## 2. Поняття про виробничі функції в економіці

Важливими елементами мікро- та макроекономічної теорії раціонального господарювання є, з одного боку, виробник, який витрачає економічні ресурси для виготовлення товарів або надання послуг, а з іншого – виробничі технологічні процеси. Для опису внутрішнього боку виробництва збирають необхідну інформацію про фактори й ресурси, які впливають на обсяг продукції, що випускається. Отримані дані записують та опрацьовують, використовуючи математичний апарат.

***Означення.*** *Функції, в яких задається відповідність між величинами, що характеризують хід конкретного процесу чи явища в економіці, сільському господарстві тощо, називаються* ***виробничими***.

## *СТОРІНКА ІСТОРІЇ*

*Аналіз виробництва здійснювався за допомогою теорії виробничих функцій, виникнення якої відносять до 1928 року, коли було опубліковано статтю "Теорія виробництва" американських учених – економіста П.Дугласа (1892-1976) й математика Д.Кобба (1875-1949). В цій статті було подано результати дослідження, в якому автори змоделювали ріст американської економіки в період з 1899 по 1922 роки. Вони розглянули спрощене уявлення про економіку, в якій випуск продукції визначений кількістю витраченої праці та об'ємом капіталу. З врахуванням наявності багатьох факторів, які зачіпали економічні показники, їх модель виявилась надзвичайно точною.*

***Пол Ховард Дуглас**, американський економіст, один з авторів "похідної функції Кобба-Дугласа". Навчався в Колумбійському та Гарвардському університетах. Президент Американської економічної асоціації (1947), сенатор США в 1949-1967 роках.*

Під *виробничою функцією* слід розуміти залежність результату від чинників, що на нього впливають. Такі функції отримуються в результаті вивчення та обробки числових даних результатів господарської діяльності або на основі спеціально проведених експериментів. Можливим є і те, що при побудові виробничої функції головна увага звертається на те, щоб функція, задана у вигляді формули (аналітично), відображала найважливіші закономірності цього процесу. Тобто виробнича функція відображає процес наближено, є його математичною моделлю.

Пропонують й інше означення виробничої функції.

***Означення. Виробнича функція (ВФ)** – це функція, незалежна змінна $x$ якої набуває значення обсягу ресурсу, котрий використовується у виробництві (фактора виробництва), а залежна змінна $y$ – значення обсягу продукції, котру випускає дане підприємство, фірма або галузь.*

Часто для позначення виробничої функції використовують уже відомий запис функції однієї змінної:

$$y = f(x),$$

проте на змінні $x, y$ (числові величини), відповідно до сформульованого означення, накладаються умови невід'ємності $(x > 0, y > 0)$.

*Запис* $y = f(x)$ *означає:* якщо ресурс витрачається або використовується в кількості $x$ одиниць, то продукція випускається в кількості $y = f(x)$ одиниць.

Виробничі функції дають можливість прогнозувати результати діяльності людини, давати наукові рекомендації, причому прогноз буде точнішим тоді, коли функція складена краще. Розрахунки, що виконуються з допомогою виробничих функцій, повинні розглядатися як середні показники, тобто отримані в ході експерименту дані будуть коливатися навколо розрахованих і наближатимуться до них лише після обчислення середніх показників.

Найчастіше досліджуються такі виробничі функції:

а) залежність попиту на товар від його ціни: $Q = f(p)$, де $Q$ – кількість проданого товару, $p$ – ціна одиниці продукції. Ця функція має бути спадною, тобто чим менша ціна, тим більший попит і навпаки;

б) залежність ринкової ціни від кількості запропонованої продукції (функція пропозиції): $p = F(Q)$, що також має бути спадною;

в) залежність доходу підприємства від вартості виробленої продукції: $R = v(p)$.

**Завдання 69.** Було проведено експеримент зі зміною оплати за користування міським транспортом. Нова форма є системою з фіксованою оплатою проїзду, коли пасажир платить за проїзд між будь-якими пунктами однаково на всіх видах транспорту.

Статистичне спостереження з'ясувало залежність кількості громадян, які будуть користуватися громадським транспортом, від різних розмірів оплати. За результатами цих спостережень аналітики визначили функцію попиту, що характеризує щоденну кількість пасажирів як функцію оплати за проїзд $p$, коп. Вона має вигляд:

$$Q = 10000 - 250p.$$

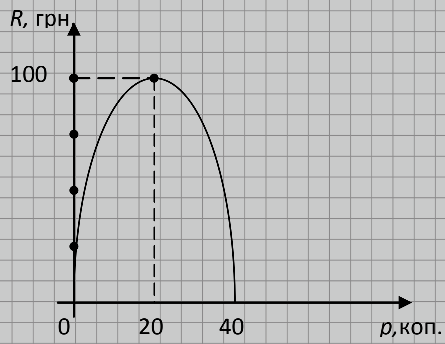
Визначте оплату за проїзд, яку потрібно призначити для максимізації щоденного доходу від користування громадським транспортом. Яким буде максимальний дохід і скільки пасажирів очікується в день за такої оплати?

*Розв'язання*

Визначимо функцію щоденного доходу залежно від оплати $p$. Загальний дохід визначається добутком функції попиту, заданої в умові, на ціну, тобто

$$R = p \cdot Q = p(10000 - 250p) = 10000p - 250p^2.$$

Це квадратична залежність. Графіком цієї функції є парабола з вершиною в точці (20;1000) і вітками, направленими вниз.




Мал. 7.1

Тоді

$$R(p) = R(20) = 20(10000 - 250 \cdot 20) = 100000\textit{коп.} = 1000\textit{грн.}$$

Отже, максимум досягається, коли $p = 20$ коп. Тому можемо дати таку <u>економічну інтерпретацію:</u> щоденний дохід буде максималізованим, коли оплата за проїзд становитиме 20 коп., а максимальний щоденний дохід дорівнюватиме 1000 грн. Кількість пасажирів очікується:

$$Q = 10000 - 250p = 10000 - 250 \cdot 20 = 5000\textit{чол.}$$

**Відповідь:** оплата за проїзд становить 20 копійок; максимальний дохід за день – 1000 грн.; кількість пасажирів, що передбачається, дорівнює 5000 чоловік.

## 3. Поняття числової послідовності, приклади числових послідовностей. Границя послідовності

**_Означення._** *Якщо кожному натуральному числу $n \in N$ за певним правилом ставиться у відповідність число $x_n$, то множина чисел $\{x_1, x_2, \dots x_n, \dots\}$ називається* ***числовою послідовністю (або послідовністю)*** *і позначається $\{x_n\}$.*

Числа $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ називаються ***членами (елементами)*** послідовності: $x_1$ – перший член, $x_2$ – другий член і так далі, $x_n$ – енний член або загальний.

За означенням послідовність містить нескінченну кількість членів, причому будь-які два з них відрізняються принаймні номерами. Отже, елементи $x_n$ і $x_m$ при $n \neq m$ вважаються різними, хоча як числа вони можуть бути рівні між собою.

**_Означення._** *Якщо всі елементи послідовності $\{x_n\}$ дорівнюють одному і тому самому числу, то її називають* ***сталою***.

| **На прикладі** | **В загальному вигляді** |
|---|---|
| $1^2; 2^2; 3^2; 4^2; \dots; n^2; \dots$<br>$4^2$ – четвертий член послідовності | $a_1; a_2; a_3; \dots; a_n; \dots$<br>$a_n$ – $n$–й член послідовності |
| ***Числові послідовності бувають:*** | |
| а) скінченні: що мають останній член | б) нескінченні: де немає останнього члена |
| в) сталі: $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$ | г) змінні: $a_1; a_2; a_3; \dots; a_n; \dots$, де є хоча б два різні елементи |

Найчастіше послідовність задається формулою її загального члена.

**Завдання 70.** Запишіть перші 5 членів послідовності, заданої її загальним членом: $x_n = \dfrac{2n+1}{n}$.

*Розв'язання*

Враховуючи означення числової послідовності, де $x_1$ – перший член, $x_2$ – другий член і так далі, робимо висновок, що для того, щоб знайти значення, наприклад, першого члена потрібно у формулі загального зробити підстановку $n = 1$. Тоді

$$x_1 = \frac{2 \cdot 1 + 1}{1} = 3.$$

Аналогічно знаходимо й інші члени послідовності:

$$n = 2,\ x_2 = \frac{2 \cdot 2 + 1}{2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2};$$

$$n = 3,\ x_3 = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3};$$

$$n = 4,\ x_4 = \frac{2 \cdot 3 + 1}{4} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4};$$

$$n = 5,\ x_5 = \frac{2 \cdot 5 + 1}{5} = \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}.$$

**Відповідь:** $\{x_n\} = \left\{3, 2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{5}, \ldots \frac{2n+1}{n}, \ldots\right\}$.

Для числової послідовності використовується поняття обмеженості:

– послідовність $\{x_n\}$ називається ***обмеженою зверху***, якщо існує таке число $M$ з множини дійсних чисел ($M \in R$), що для будь-якого $n$ з множини натуральних чисел ( $n \in N$ ) виконується нерівність $x_n \leq M$ ;

– послідовність $\{x_n\}$ називається ***обмеженою знизу***, якщо існує таке $M \in R$ , що для $n \in N$ виконується нерівність $x_n \geq m$ ;

– послідовність $\{x_n\}$ називається ***обмеженою***, якщо вона обмежена зверху і знизу, тобто існують такі $M$, $m \in R$, що для будь-якого $n \in N$ виконується подвійна нерівність $m \leq x_n \leq M$ .

У протилежних випадках послідовність ***необмежена.***

**Означення.** *Число* $x_0$ *називається* ***границею послідовності*** $\{x_n\}$*, якщо для довільного числа* $\varepsilon > 0$ *існує такий номер* $N = N(\varepsilon)$*, що при всіх* $n > N$ *виконується нерівність* $|x_n - x_0| < \varepsilon$.

Якщо число $x_0$ є границею послідовності $\{x_n\}$, то пишуть:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \text{або} \quad \lim x_n = x_0,\ x_n \to x_0 \qquad (7.5)$$

і кажуть, що послідовність числу $x_0$ або прямує до $x_0$.

---

## *СТОРІНКА ІСТОРІЇ*

*Знак границі* $\lim$*, що є скороченням латинського слова limes – межа, у вигляді* $\lim\limits_{x\to\infty}$*,* $\lim\limits_{x\to a}$ *ввів у 1853 році сер Вільям Ровен Гамільтон (1806–1865) – ірландський математик, один із найвизначніших математиків XIX століття.*

*Народився в Дубліні, у родині юриста. Але з трьох років, через фінансові труднощі батьків, перебував на вихованні у дядька – вікарія та вчителя. Саме під його керівництвом хлопець до 12 років вивчив 12 мов та навчився добре і швидко рахувати подумки.*

*Вступивши до коледжу, він продемонстрував такі блискучі здібності, що в 22 роки був призначений професором астрономії Дублінського університету. У 1835 році отримав титул баронета від віце-короля Ірландії, а у 1837 був обраний президентом Королівської ірландської академії та членом-кореспондентом Петербурзької академії наук.*

*Історики стверджують, що в своїх геніальних творах Гамільтон випередив своїх сучасників. Надзвичайно великим є його внесок, зроблений у розвиток алгебри, теорії диференціальних рівнянь, фізики, астрономії, оптики, динаміки.*

Послідовність, яка має границю $x_0$, називається ***збіжною до*** $x_0$ (або просто ***збіжною***). Послідовність, яка не є збіжною, називається ***розбіжною***.

***Означення***. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називається* ***нескінченною малою****, якщо* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

***Означення.*** *Послідовність* $\{x_n\}$ *називається* ***нескінченно великою****, якщо для будь-якого* $M > 0$ *можна знайти такий номер N, що при всіх* $n > N$ *виконується нерівність* $|x_n|>M$. *Якщо* $\{x_n\}$ *– нескінченно велика, то* $\lim x_n = \infty$.

Послідовності розрізняють:

| **Строго монотонні** | | **Монотонні** | |
|---|---|---|---|
| Послідовність $\{x_n\}$ називається | | | |
| ***зростаючою*** | ***спадною*** | ***незростаючою*** | ***неспадною*** |
| якщо | | | |
| $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$ | $x_1 > x_2 > \ldots > x_n > \ldots$ | $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq \ldots$ | $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots$ |

### *Основні теореми про границі числових послідовностей*

Нехай дано числові послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$, для яких $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

1) Границя алгебраїчної суми двох послідовностей дорівнює алгебраїчній сумі границь цих послідовностей, тобто:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n = a \pm b. \qquad (7.6)$$

2) Границя добутку двох послідовностей дорівнює добутку границь, тобто:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = a \cdot b\,. \qquad (7.7)$$

3) Сталий множник можна винести за знак границі, тобто:

$$\lim_{n\to\infty}(C \cdot x_n) = C \cdot \lim_{n\to\infty} x_n\,. \qquad (7.8)$$

4) Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і $k \in \mathrm{N}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^k = (\lim\limits_{n\to\infty} x_n)^k = a^k$.

5) Границя частки двох послідовностей дорівнює частці границь за умови, що границя послідовності, що є дільником, не дорівнює нулю, тобто:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}, \text{ причому } \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0\,. \qquad (7.9)$$

Можна сформулювати ще й такі важливі теореми про границі:

1) послідовність може мати лише одну границю;
2) послідовність, що має скінченну границю – ***обмежена***, якщо послідовність має нескінченну границю, то вона ***необмежена;***
3) **монотонно обмежена** послідовність має скінченну границю:
   - якщо ця послідовність ***монотонно зростає***, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq x_n$;
   - якщо послідовність ***монотонно спадає***, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq x_n$;
4) **монотонно необмежена** послідовність має нескінченну границю:
   - якщо ця послідовність ***монотонно зростає***, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$;
   - якщо послідовність ***монотонно спадає***, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

**Необхідна та достатня умови існування границі послідовності (теорема О.Коші).** Для збіжності $\{x_n\}$ необхідно й достатньо, щоб для $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ N^* \in N$ та $N^*(\varepsilon)$, що $\forall\ m, p \in N$ за умови $m > N^*(\varepsilon)$ і $p > N^*(\varepsilon)$ виконувалась нерівність $\left|x_m - x_p\right| < \varepsilon$.

***Означення.*** *Послідовність, яка володіє необхідною і достатньою ознакою, називається* ***фундаментальною.***

## 4. Нескінченно малі та нескінченно великі величини, зв'язок між ними

Нехай дано функції $y = \alpha(x)$, $y = \beta(x)$, $y = \gamma(x)$ і припустимо, що

$$\lim_{x\to a}\alpha(x) = \lim_{x\to a}\beta(x) = \lim_{x\to a}\gamma(x) = 0,$$

де $a$ – деяка точка або нескінченність, тобто $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ – нескінченно малі величини.

Розрізняють нескінченно малі величини одного та вищого порядків малості.

***Означення.*** *Нескінченно малі величини* $\alpha(x)$ *та* $\beta(x)$ *називаються* ***нескінченно малими величинами одного порядку малості,*** *якщо*

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \qquad (7.10)$$

*за умови, що* $A \neq 0$ *і* $A \neq \infty$.

***Означення.*** *Нескінченно мала величина* $\alpha(x)$ *називається* ***нескінченно малою величиною вищого порядку малості ніж*** $\beta(x)$***,*** *якщо*

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0. \qquad (7.11)$$

**Завдання 71.** Дослідіть порядок малості нескінченно малих величин $\alpha(x)=\sin x^2$ та $\beta(x)=x$, якщо $x\to 0$.

*Розв'язання*

Для того, щоб встановити порядок малості нескінченно малих величин, перевіримо виконання умов (7.10) та (7.11). Для цього обчислимо границю, застосувавши першу визначну границю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}x=1\cdot 0=0.$$

**Відповідь:** враховуючи умову (7.11), стверджуємо, що $\alpha(x)=\sin x^2$ є нескінченно малою величиною вищого порядку малості ніж $\beta(x)=x$.

***Означення.*** *Якщо границя* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ *не існує, то* $\alpha(x)$ *та* $\beta(x)$ *називаються* ***непорівнянними*** *нескінченно малими величинами.*

**Завдання 72.** Дослідіть зв'язок між нескінченно малими величинами $x\sin\dfrac{1}{x}$ та $x$ при $x\to 0$.

*Розв'язання*

Обчислимо границю відношення даних величин за умови, що $x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}.$$

Оскільки отримана границя за умови $x\to 0$ не існує, то дані нескінченно малі величини непорівнянні.

**Відповідь:** нескінченно малі величини $x\sin\frac{1}{x}$ та $x$ непорівнянні.

## 5. Границя функції в точці та на нескінченності. Основні теореми про границі

***Означення.*** *Число А називається **границею функції** $y=f(x)$ **при** $x\to a$**,** якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon>0$ існує таке число $\delta$ (дельта), яке залежить від $E\ (\delta(\varepsilon))$, що як тільки $|x-a|<\delta$, то $|f(x)-A|<\varepsilon$.*

Позначається

$$\lim_{x\to a} f(x)=A. \tag{7.12}$$

**Завдання 73.** Обчисліть границю функції $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+4}{x^2+2}$.

*Розв'язання*

Для обчислення границі функції в точці першим кроком є підстановка числа, до якого прямує невідома величина замість самої невідомої функції, границя якої обчислюється:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x+4}{x^2+2}=\frac{3\cdot 1+4}{1^2+2}=\frac{7}{3}.$$

**Відповідь:** $\frac{7}{3}$.

***Означення.*** *Число A називається* ***границею функції на нескінченності*** $(x \to \infty)$, *якщо для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *існує таке число M, що як тільки* $|x| > M$, *то* $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Позначається

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A. \qquad (7.13)$$

**Завдання 74.** Знайдіть границю $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+1}{x}$.

*Розв'язання*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} 1 + \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 1.$$

**Відповідь:** 1.

**Основні теореми про границі**

*Теорема1*. Границя сталої величини дорівнює цій сталій величині:

$$\lim_{x \to a} C = C \text{, де C=const.} \qquad (7.14)$$

*Теорема 2.* Сталий множник можна винести за знак границі:

$$\lim_{x \to a}(C \cdot f(x)) = C \lim_{x \to a} f(x). \qquad (7.15)$$

*Теорема 3.* Границя алгебраїчної суми декількох функцій дорівнює алгебраїчній сумі границь кожної з цих функцій:

$$\lim_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x). \qquad (7.16)$$

*Теорема 4.* Границя добутку декількох функцій дорівнює добутку границь кожної з цих функцій:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x). \qquad (7.17)$$

*Теорема 5*. Границя частки двох функцій дорівнює частці границь цих функцій за умови, що границя знаменника не дорівнює нулю:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)},\ \text{якщо}\ \lim_{x\to a}g(x)\neq 0. \qquad (7.18)$$

## 6. Границя відношення двох многочленів

***Правило.*** Границя відношення двох многочленів при $x\to a$, де $a$ – скінченне число, дорівнює частці границь чисельника і знаменника за умови, що границя знаменника $\neq 0$.

Якщо при знаходженні границі відношення двох многочленів одержимо невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$, то необхідно чисельник і знаменник розкласти на множники, а потім скоротити.

**Завдання 75.** Знайдіть границі функцій у точці: а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{2x^3+3x^2-10x-275}{4x^3+6x^2-20x-550}$.

*Розв'язання*

**а)** Оскільки запропоновано обчислити границю функції в точці, то підставимо замість невідомої у функцію її конкретне значення $x=1$. Розкрити отриману невизначеність типу $\left(\frac{0}{0}\right)$ можемо, розклавши на множники вирази чисельника та знаменника (за формулами скороченого множення). Тобто:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{1+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}.$$

**б)** У даному випадку готової формули, що допомогла б розкрити невизначеність типу $\left(\frac{0}{0}\right)$, немає. Не дасть позитивного результату і групування доданків – відсутній спільний множник у чисельнику та знаменнику дробу. Запишемо многочлени чисельника та знаменника так, щоб після групування можна було винести спільний множник за дужки та виконати скорочення дробу.

$$\lim_{x\to 5}\frac{2x^3+3x^2-10x-275}{4x^3+6x^2-20x-550}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 5}\frac{2x^3-10x^2+13x^2-65x+55x-275}{4x^3-20x^2+26x^2-130x+110x-550}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{2x^2(x-5)+13x(x-5)+55(x-5)}{4x^2(x-5)+26x(x-5)+110(x-5)}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(2x^2+13x+55)}{(x-5)(4x^2+26x+110)}=\lim_{x\to 5}\frac{2x^2+13x+55}{4x^2+26x+110}=$$

$$=\frac{2\cdot 5^2+13\cdot 5+55}{4\cdot 5^2+26\cdot 5+110}=\frac{50+65+55}{100+130+110}=\frac{170}{340}=\frac{17}{34}=\frac{1}{2}.$$

**Відповідь**: а) $\frac{3}{2}$; б) $\frac{1}{2}$.

Якщо розглядаємо ***границю відношення двох многочленів при*** $x\to\infty$***,*** то справедливою є формула:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}=\begin{cases}0, & n<m\\ \frac{a_0}{b_0}, & n=m\\ \infty, & n>m\end{cases}. \qquad (7.19)$$

**Завдання 76.** Обчисліть границі відношення двох многочленів:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-8x+7}{2x^3-5x^2+4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+5}{4x^2+6x+7}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-4x^2+9}{3x^2+2x+7}$.

Дослідіть правильність отриманого результату за допомогою формули.

*Розв'язання*

**а)** Обчислення границі відношення двох многочленів на нескінченності приводить до появи невизначеності типу $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Для її розкриття визначимо у функції невідому в найвищому степені та поділимо на неї чисельник і знаменник даного дробу. Застосувавши основні теореми про границі, отримаємо шуканий результат.

***<u>Зауваження.</u>*** При обчисленні границь варто пам'ятати, що значення виразу $\dfrac{c}{\infty}$, де $c = const$ буде як завгодно близьким до нуля. Тому можна стверджувати, що $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{c}{x}=0$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-8x+7}{2x^3-5x^2+4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^2}{x^3}-\dfrac{8x}{x^3}+\dfrac{7}{x^3}}{\dfrac{2x^3}{x^3}-\dfrac{5x^2}{x^3}+\dfrac{4}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3}{x}-\dfrac{8}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}}{2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{x^3}}=\frac{0}{2}=0.$$

Для перевірки правильності результату проаналізуємо границю відповідно до формули (7.19).

Оскільки $n=2$, $m=3$, тобто $n<m$ $(2<3)$, то границя відношення двох многочленів за (7.19) при $x\to\infty$ дорівнює 0.

**б)** Проведемо міркування, аналогічні до попереднього завдання:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+5}{4x^2+6x+7}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{6x}{x^2}+\frac{7}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}{4+\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2}}=\frac{2-\frac{3}{\infty}+\frac{5}{\infty}}{4+\frac{6}{\infty}+\frac{7}{\infty}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Перевірка: за формулою: $n=2$, $m=2$, отже, $n=m$, тому $\frac{a_0}{b_0}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

**в)** *Перший спосіб*:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-4x^2+9}{3x^2+2x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{4}{x}+\frac{9}{x^3}}{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}}=\frac{5}{0}=\infty.$$

Перевірка (*другий спосіб*): $n=3$, $m=2$, отже, $n>m$, тому значення границі буде $\infty$.

**Відповідь:** а) 0; б) $\frac{1}{2}$; в) $\infty$.

## 7. Перша та друга визначні (чудові ) границі

***Означення. Першою визначною границею*** *називається границя виду*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (7.20)$$

Використання першої визначної границі проілюструємо конкретними прикладами.

**Завдання 77.** Обчисліть границі функції:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tqx}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$.

*Розв'язання*

**а)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{k\cdot\sin kx}{k\cdot x}=k\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}=k\cdot 1=k$.

**б)**

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{\cos 0}\cdot 1=1\cdot 1=1\cdot$$

**в)**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin mx}{x\cdot\sin nx}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin nx}\cdot\frac{\sin mx}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{nx}{n\cdot\sin nx}\cdot\frac{m\cdot\sin mx}{mx}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{nx}{n\cdot\sin nx}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{m\cdot\sin mx}{mx}=\frac{1}{n}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{nx}{\sin nx}\cdot m\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{mx}=\frac{1}{n}\cdot m=\frac{m}{n}\cdot$$

**г)**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{c}\arcsin x=y\\ x=\sin y\\ \textit{Якщо}\ x\to 0,\textit{то}\ \arcsin 0=0,\textit{тому}\quad y\to 0\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1\cdot$$

**Відповідь**: а) $k$; б) 1; в) $\dfrac{m}{n}$; г) 1.

***Означення. Другою визначною (чудовою) границею*** *називається границя виду*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e. \qquad (7.21)$$

Якщо у даній границі зробити заміну $\frac{1}{x}=\alpha$, то $x=\frac{1}{\alpha}$, а від $x\to\infty$ перейти до $\alpha\to 0$, то отримаємо інший запис другої визначної границі:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e. \qquad (7.22)$$

**Завдання 78.** Обчисліть границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}$; б) $\lim\limits_{x\leftarrow\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax+b}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{ax+b}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-2}\right)^{x}$.

*Розв'язання*

**а)** $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x\cdot k}{k}}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right)^{k}=e^{k}.$$

**б)** $$\lim_{x\leftarrow\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5x}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{5}=e^{5}.$$

**в)** $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax+b}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{b}=e^{a}\cdot 1^{b}=e^{a}.$$

**г)** $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{ax+b}=\left(e^{k}\right)^{a}=e^{ka}.$$

**д)**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-2}\right)^{x}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x}{x}+\frac{5}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{5}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^{x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-2)}{x}\right)^{x}}=\frac{e^{5}}{e^{-2}}=e^{7}.$$

**Відповідь:** а) $e^{k}$; б) $e^{5}$; в) $e^{a}$; г) $e^{ka}$; д) $e^{7}$.

**У результаті вивчення теми необхідно:**

| *знати* | *вміти* |
|---|---|
| - поняття виробничої функції в економіці;<br>- способи задання функцій;<br>- аналітичне задання основних елементарних функцій, їх властивості;<br>- поняття числової послідовності;<br>- поняття нескінченно малих та нескінченно великих величин, зв'язок між ними;<br>- означення границі функції в точці і на нескінченності;<br>- основні теореми про границі;<br>- визначні (чудові) границі. | - знаходити область визначення функції;<br>- досліджувати функції на парність та непарність, періодичність та неперіодичність за аналітичним виразом;<br>- обчислювати границі складніших числових послідовностей;<br>- обчислювати границі функцій в точці та на нескінченності (зокрема границю відношення двох многочленів, першу та другу визначну границю тощо). |

**Питання для самоконтролю**

1. Сформулюйте означення функції.
2. Що називається областю визначення та множиною значень функції?
3. Які є способи задання функції?
4. Який вигляд мають основні елементарні функції, задані аналітично?
5. Яка функція називається виробничою? Наведіть приклади використання виробничої функції в економіці.
6. Яка послідовність називається числовою? Введіть поняття її загального члена.

7. Сформулюйте означення сталої, обмеженої (необмеженої), збіжної (розбіжної), нескінченно малої (великої), фундаментальної, монотонної та строго монотонної послідовності.
8. Сформулюйте необхідну та достатню умови існування границі послідовності (теорему О. Коші).
9. В чому полягає зв'язок між нескінченно малою та нескінченно великою величинами?
10. Сформулюйте означення границі функції в точці та на нескінченності.
11. Сформулюйте та запишіть основні теореми про границі.
12. Як знайти границю відношення двох многочленів при *x*, прямуючому до деякого скінченного числа?
13. Запишіть формулу для обчислення границі відношення двох многочленів при $x \to \infty$.
14. Сформулюйте значення першої та другої визначних (чудових) границь.

# ТЕМА 08. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

***План***

*1. Поняття неперервності функції в точці та на відрізку.*
*2. Властивості неперервних функцій.*
*3. Точки розриву функцій та їх класифікація.*

*Основні терміни та поняття:* функція, неперервна в точці, на відрізку, одностороння неперервність; точка усувного розриву; розрив першого та другого роду; розривна функція.

## 1. Поняття неперервності функції в точці та на відрізку

Нехай дана функція $y = f(x)$ визначена у всіх точках даного проміжку $(a;b)$ і дана точка $x_0 \epsilon (a;b)$.

***Означення***. *Функція $f(x)$ називається **неперервною в точці** $x_0$, якщо вона визначена в деякому околі точки $x_0$ та існує границя функції в цій точці, яка дорівнює значенню функції в цій точці, тобто*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (8.1)$$

Отже, для того, щоб функція $f(x)$ була неперервна в точці $x_0$, важливими є умови, які називаються ***необхідними і достатніми умовами*** для неперервності функції $f(x)$ в точці $x_0$:

1) функція $f(x)$ визначена в точці $x_0$, тобто існує значення функції в цій точці ( $f(x_0)$ );
2) існує границя функції $f(x)$ при $x \to x_0$ ( $\lim_{x \to x_0} f(x)$ );
3) границя функції в точці дорівнює значенню функції в цій точці, тобто $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

**Завдання 79.** Дослідіть на неперервність у точці $x_0 = 2$ функцію $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - 5x + 4}$.

*Розв'язання*

Перевіримо виконання необхідних та достатніх умов, які справедливі для функції, неперервної в точці.

1. Знайдемо значення функції в даній точці:

$$f(x_0) = f(2) = \frac{2^3 + 2 \cdot 2 + 1}{2^2 - 5 \cdot 2 + 4} = -\frac{13}{2}.$$

2. Знайдемо границю даної функції за умови, що невідома прямує до даної точки:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - 5x + 4} = \frac{\lim\limits_{x \to 2}\left(x^3 + 2x + 1\right)}{\lim\limits_{x \to 2}\left(x^2 - 5x + 4\right)} = -\frac{13}{2}.$$

3. Базуючись на проведеному дослідженні, можемо стверджувати, що дана функція є неперервною в точці $x_0 = 2$, адже $-\dfrac{13}{2} = -\dfrac{13}{2}$, тобто виконується умова $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

**Відповідь:** функція $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - 5x + 4}$ неперервна в точці $x_0 = 2$.

Справедливою є така теорема.

***Теорема.*** *Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ неперервні в точці $x_0$, то функції $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при $g(x) \neq 0$) також неперервні в точці $x_0$.*

Існує й інше означення неперервності функції в точці, яке ґрунтується на понятті приросту.

***<u>Зауваження</u>.*** *Приростом* деякої величини називається різниця двох її значень. Зокрема значення $\Delta x = x - x_0$, де $x_0$ – початкове, а $x$ – кінцеве значення аргументу, називається *приростом аргументу*. Відповідно $\Delta y = \Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$, де $f(x_0)$ – початкове, а $f(x\ )$ – кінцеве значення функції, називається *приростом функції*.

***Означення.*** *Функція $f(x)$ називається **неперервною в точці** $x_0$**,** якщо вона визначена в цій точці та в деякому її околі нескінченно малому приросту аргументу $\Delta x$ відповідає нескінченно малий приріст функції $\Delta y = \Delta f(x)$, тобто*

$$\left(\Delta x \to 0\right) \to \left(\Delta f(x) \to 0\right).$$

Введемо поняття односторонньої неперервності.

***Означення***. *Функція $f(x)$, визначена на проміжку $\left(a; x_0\right]$, називається **неперервною зліва в точці** $x_0$**,** якщо $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$. Функція $f(x)$, визначена на проміжку $\left[x_0; b\right)$, називається **неперервною справа в точці** $x_0$**,** якщо $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.*

***Означення***. *Для неперервності функції $f(x)$ в точці $x_0$ <u>необхідно і достатньо</u>, щоб вона була неперервна в цій точці зліва й справа.*

***Означення***. *Якщо функція неперервна в кожній точці деякого відрізка $\left[a; b\right]$, то вона **неперервна на всьому відрізку**.*

Поняття неперервності використовується для детального опису виробничої функції.

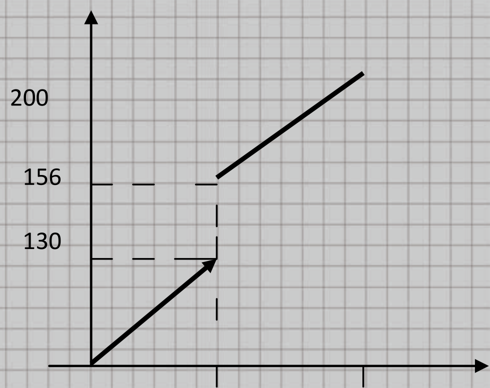
**Завдання 80.** Фірма за $x$ одиниць проданого товару платить продавцю $y = 2x + 50$ грн. за умови, що продано товару менш ніж 40 одиниць, та доплачує 20% комісійних, якщо товару продано 40 одиниць та більше. Опишіть залежність між кількістю проданого товару та заробітною платою, отриманою продавцем, і побудуйте графік цієї залежності.

*Розв'язання*

Оскільки кількість проданого товару величина невід'ємна, то у випадку продажу менш ніж 40 одиниць товару функція $y = 2x + 50$ розглядається на проміжку $x \in [0;40)$. Якщо ж продано 40 або більше одиниць товару (математично це можна записати як $x \in [40;+\infty)$), то здійснюється доплата в 20%, тобто продавець отримає грошей в 1,2 раза більше. Їх кількість в такому випадку буде зазначатися функцією $y = 1{,}2(2x + 50)$.

Отже, залежно від інтервалу, в якому знаходиться кількість проданого товару, функція оплати матиме різний вигляд:

$$y = \begin{cases} 2x + 50, \textit{якщо} \quad x \in [0;40); \\ 1{,}2(2x+50), \textit{якщо} \quad x \in [40;+\infty) \end{cases}.$$




Мал. 8.1

На мал. 8.1 побудовано графік даної функції.

Він складається з двох частин: на інтервалі $[0;40)$ – це пряма $y_1 = 2x + 50$, а на інтервалі $[40;+\infty)$ – промінь $y_2 = 1{,}2(2x + 50)$.

Тобто функція, що розглядається, не є неперервною, а отже, має розрив у точці

$x = 40$.

Границя $\lim\limits_{x \to 40}(2x + 50) = 130$, якщо $x \in [0;40)$ (прямує до точки $x = 40$ зліва).

Границя $\lim\limits_{x \to 40} 1{,}2(2x + 50) = 156$, якщо $x \in [40;+\infty)$ (прямує до точки $x = 40$ справа).

За своїм економічним змістом функції попиту $q = q(p)$ та пропозиції $s = s(p)$ неперервно залежать від ціни $p$. Отже, за малих коливань цін попит і пропозиція також змінюються неперервно. За глибшого аналізу часто виявляються психологічні причини, за яких попит, наприклад, може змінитися стрибкоподібно. Так буває в разі "пробиття" круглої ціни. Ціна підвищується, але люди "терплять", і попит зменшується неістотно. І ось ціна завмерла біля "круглої" цифри. Коли ціна перевищує "круглу" цифру, може відбутися різке стрибкоподібне зменшення попиту. Це добре знають фахівці, які працюють на валютних та інших фінансових ринках.

## 2. Властивості неперервних функцій

Нехай функція неперервна на відрізку $[a;b]$. Мають місце ряд властивостей.

**Властивість 1 (*перша теорема Вейєрштрасса*)**. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.

**Властивість 2** (***друга теорема Вейєрштрасса***). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона досягає на цьому відрізку своїх точних меж, тобто існують точки $x_1, x_2$ такі, що належать проміжку $[a;b]$ і що

$$f(x_1) = \sup_{[a;b]} f(x) \ , \ f(x_2) = \inf_{[a;b]} f(x). \qquad (8.2)$$

**Властивість 3 (*перша теорема Больцано-Коші*)**. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і на кінцях цього відрізка набуває значення різних знаків, тобто $f(a)\cdot f(b) < 0$, то існує така точка $c \in [a;b]$, в якій $f(c) = 0$.

**Властивість 4** (***друга теорема Больцано-Коші***). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, причому $f(a) = A, f(b) = B$, то для будь–якого числа $C$, що міститься між $A$ і $B$, знайдеться така точка $c \in [a;b]$, в якій $f(c) = C$.

## 3. Точки розриву функцій та їх класифікація

Нехай $x_0$ – гранична точка множини $X$ – області визначення функції $f(x)$.

***Означення.*** *Точка $x_0$ називається* ***точкою розриву функції****, якщо функція не є неперервною в цій точці.*

Розрізняють декілька видів точок розриву.

***Означення.*** *Точка* $x_0$ *називається* ***точкою усувного розриву*** *функції* $f(x)$, *якщо існує границя* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, *але функція* $f(x)$ *не визначена в точці* $x_0$, *або*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0). \tag{8.3}$$

***Означення.*** *Точка* $x_0$ *називається* ***точкою розриву першого роду,*** *якщо існують права й ліва границі функції* $f(x)$ *в точці* $x_0$, *які не дорівнюють одна одній, тобто*

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x_0). \tag{8.4}$$

***Означення.*** *Точка* $x_0$ *називається* ***точкою розриву другого роду,*** *якщо в точці* $x_0$ *не існує принаймні одна з односторонніх границь функції* $f(x)$ *або ж ця границя нескінченна.*

Якщо $x_0$ – точка розриву функції, то функцію називають **розривною в точці** $x_0$. Або **розривною** називається функція, яка має хоча б одну точку розриву.

**Завдання 81**. Дослідіть функцію $y = \dfrac{x-2}{x^2 - 3x + 2}$ на неперервність у точках $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. У випадку розриву встановіть його вид.

*Розв'язання*

Перевіримо спочатку точку $x_1 = 1$. Знайдемо значення функції в цій точці:

$$y(1) = \frac{1-2}{1^2 - 3 \cdot 1 + 2} = \frac{-1}{0}.$$

Оскільки при підстановці знаменник функції перетворюється на нуль, то $x_1 = 1$ – точка розриву. Встановимо його вид. Для цього знайдемо односторонні границі даної функції: праву (при $x \to 1+0$) та ліву ($x \to 1-0$).

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{x-2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1+0} \frac{x-2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 1+0} \frac{1}{x-1} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x-2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1-0} \frac{x-2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty.$$

За означенням, якщо принаймні одна з односторонніх границь нескінченна (у даному прикладі нескінченними є обидві границі), то точка $x_1 = 1$ є точкою розриву другого роду.

Аналогічно здійснюється перевірка на неперервність у точці $x_2 = 2$. Оскільки:

$$y(2) = \frac{2-2}{2^2 - 3 \cdot 2 + 2} = \frac{0}{0},$$

то в даній точці функція невизначена.

Значення односторонніх границь:

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{x-2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 2+0} \frac{x-2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 2+0} \frac{1}{x-1} = 1,$$

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{x-2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 2+0} \frac{x-2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 2+0} \frac{1}{x-1} = 1.$$

За означенням, якщо існує границя функції (у нас обидві односторонні границі існують і дорівнюють певному числу), але в даній точці функція невизначена, то $x_2 = 2$ – точка усувного розриву.

**Відповідь:** $x_1 = 1$ – точка розриву другого роду; $x_2 = 2$ – точка усувного розриву.

**У результаті вивчення теми необхідно:**

| *знати* | *вміти* |
|---|---|
| - поняття односторонньої неперервності функції;<br>- основні властивості неперервних функцій. | - досліджувати функції на неперервність у точці та на проміжку;<br>- досліджувати існування точок розриву функцій та встановлювати їх вид. |

**Питання для самоконтролю**

1. Сформулюйте означення функції в точці та на відрізку.
2. Виконання яких умов є необхідним і достатнім для того, щоб функція була неперервна в даній точці?
3. Які операції можна виконувати над неперервними функціями?
4. Сформулюйте означення функції, перервної зліва (справа) деякої точки.
5. Які властивості виконуються для функції, непевної на відрізку?
6. Яка різниця між точками розриву першого та другого роду?
7. Коли функція називається розривною?
8. Поясніть, яка економічна інтерпретація неперервності?

# ТЕМА 09. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

***План***

1. *Задачі, які приводять до поняття похідної.*
2. *Означення похідної функції.*
3. *Геометричний, фізичний та економічний зміст похідної. Зв'язок між неперервністю та диференційованістю.*
4. *Похідні основних елементарних функцій. Основні правила диференціювання.*
5. *Диференціювання складеної, логарифмічної та оберненої функцій.*
6. *Похідна функції, заданої неявно. Похідні вищих порядків.*

*Основні терміни та поняття*: границя функції в точці, приріст функції, приріст аргументу, похідна функції, диференціювання, кут нахилу, дотична, нормаль, швидкість, прискорення, основні елементарні функції, алгебраїчна сума, правила диференціювання, складена функція, логарифмічна функція, обернена функція, неявно задана функція, похідна другого порядку, похідна вищого порядку.

## 1. Задачі, які приводять до поняття похідної

**а) *Задача про миттєву швидкість.***

Нехай закон прямолінійного руху матеріальної точки задано функцією $S(t)$. Знайдемо швидкість руху точки в момент часу $t_0$. Для розв'язання цієї задачі міркування проводимо так:

1) в момент часу $t_0$ точка пройшла відстань $S(t_0)$;

2) надамо аргументу $t_0$ приросту $\Delta t$. Тоді відстань, яку пройде нова точка $t_0 + \Delta t$, буде $S(t_0 + \Delta t)$;

3) за деякий час $\Delta t$ точка пройде шлях $\Delta S$ (приріст шляху), який буде:

$$\Delta S = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0);$$

4) тоді середня швидкість $V_c$ руху точки від значення $t_0$ до $t_0 + \Delta t$ буде:

$$V_c = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}.$$

За незначної зміни часу $\Delta t$ значення швидкості при різних значеннях $t$ можуть істотно відрізнятися. Тому можна говорити про миттєву швидкість у момент часу $t_0$. Її можна знайти як границю відношення приросту шляху до приросту часу за умови, що приріст часу прямує до нуля, тобто

$$V_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}. \qquad (9.1)$$

Аналогічні міркування проводяться і в процесі розв'язування:
**б)** ***задачі про величину змінного струму, який проходить по провіднику;***
**в)** ***задачі про густину лінійного стержня;***
**г)** ***задачі про продуктивність праці; про витрати виробництва та виручку*** тощо.

Розглянемо **задачу про продуктивність праці**.

Нехай функція $u(t)$ виражає кількість випущеної продукції $u$ за час $t$ і необхідно знайти продуктивність праці в момент часу $t_0$. Покроково:

1) в момент часу $t_0$ кількість продукції дорівнює $u(t_0)$;

2) за період часу від $t_0$ до $t_0 + \Delta t$ кількість продукції зміниться від $u(t_0)$ до $u(t_0 + \Delta t)$;

3) приросту часу $\Delta t$ відповідатиме приріст випущеної продукції:

$$\Delta u = u(t_0 + \Delta t) - u(t_0);$$

4) середня продуктивність праці за цей час:

$$P_c = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)}{\Delta t};$$

5) продуктивність праці в момент часу $t_0$ буде дорівнювати граничному значенню середньої продуктивності праці за період від $t_0$ до $t_0 + \Delta t$ за умови, що $\Delta t \to 0$, тобто

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} P_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)}{\Delta t}. \qquad (9.2)$$

Аналіз розв'язків усіх цих задач дозволяє зробити висновок про єдність способу розв'язування. Узагальнивши задачі до абстрактних змінних $x$ та $y$ (не вкладаючи в них конкретного змісту), отримаємо границю, яка в математиці називається похідною.

Ще одним прикладом задачі, що приводить до поняття похідної, є **задача про витрати виробництва та виручку.**

Нехай *К=К(х)* – витрати виробництва однорідної продукції – деяка функція кількості продукції *х*. Зазначимо, що кількості продукції $x+\Delta x$ відповідають витрати виробництва продукції $K(x+\Delta x)$. Отже, диференціальне відношення, що характеризує середній приріст витрат виробництва,

$$\frac{\Delta K(x)}{\Delta x} = \frac{K(x + \Delta x) - K(x)}{\Delta x}. \qquad (9.3)$$

Воно відображає приріст витрат виробництва на одиницю приросту кількості продукції.

***Означення.*** *Границя виду* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K(x)}{\Delta x} = K'(x)$ *називається* ***граничними витратами виробництва***.

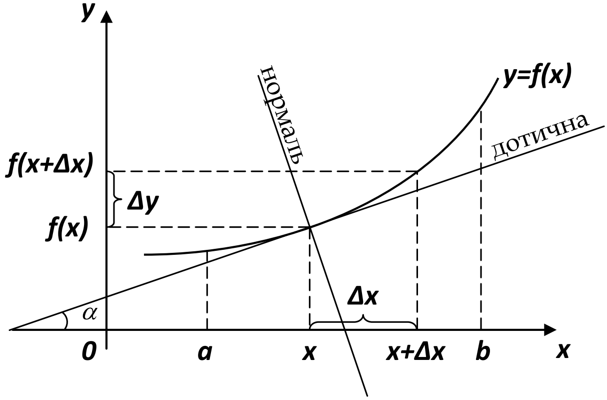
Нехай $U(x)$ – виручка від продажу $x$ одиниць товару. Міркування, аналогічні попереднім, приводять до границі:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x + \Delta x) - U(x)}{\Delta x} = U'(x), \qquad (9.4)$$

яку називають ***граничною виручкою***.

## 2. Означення похідної функції

Розглянемо функцію $y = f(x)$, яка визначена на деякому інтервалі $(a;b)$. Візьмемо довільне значення змінної $x$ і надамо їй деякого приросту $\Delta x$.




мал. 9.1

Тоді функція $y = f(x)$ набуде приросту $\Delta y$, що буде дорівнювати

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \qquad (9.5)$$

Складемо відношення приросту функції до приросту аргументу, тобто

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (9.6)$$

***Означення. Похідною функції*** $f(x)$ *називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, якщо приріст аргументу прямує до нуля :*

$$f'(x) = y'_x = \lim_{x \to 0-} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (9.7)$$

Відношення (9.6) називають ***диференціальним відношенням***, а операцію зі знаходження похідної називають ***диференціюванням***.

***Диференціальне числення*** – математичний апарат, що широко застосовується для економічного аналізу. Основним завданням економічного аналізу є вивчення економічних зв’язків, які записуються у вигляді функції. Працівникам економічної сфери часто доводиться вирішувати завдання типу: дослідіть, як зміниться дохід держави в разі збільшення податків або введення імпортного мита? Зросте чи зменшиться прибуток фірми внаслідок збільшення ціни на її продукцію? Щоб вирішити ці та інші завдання, потрібно побудувати функції зв’язку змінних, а потім вивчити їх за допомогою методів диференціального числення.

Використаний підхід до введення поняття "похідна" дозволяє знаходити її значення, використовуючи сформульоване означення. Процес диференціювання функції можна описати покроково.

**_Правило диференціювання (знаходження похідної) функції_**
$y = f(x)$ **_в довільній точці_** $x_0 \in (a;b)$

1. Знайдіть значення функції в даній точці: $f(x_0)$;

2. Надайте точці $x_0$ деякого приросту $\Delta x$ (він може бути як додатним, так і від’ємним числом), але такого, щоб нова точка $x_0 + \Delta x$ також належала інтервалу $(a;b)$;

3. Знайдіть значення функції в новій точці: $f(x_0 + \Delta x)$;

4. Знайдіть приріст функції $f(x)$ в точці $x_0$ за формулою:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0);$$

5. Складіть відношення приросту функції до приросту аргументу: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

6. Знайдіть границю отриманого відношення за умови, що $\Delta x \to 0$. Якщо така границя існує, то вона і є похідною функції $y = f(x)$ в точці $x_0$.

**Завдання 82.** Знайти похідну функції $y = x^2$, використовуючи правило диференціювання.

*Розв'язання*

Знайдемо похідну, використовуючи означення.

Оскільки нам не задано точку, в якій треба обчислити похідну функції, то виведемо її в загальному вигляді. Для цього відразу надамо змінній приросту та отримаємо нову точку $x + \Delta x$.

Згідно з правилом диференціювання знайдемо значення функції $y = x^2$ в точці:

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

та запишемо приріст функції в даній точці:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 .$$

Складемо відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x .$$

Знайшовши границю відношення приросту функції до приросту аргументу, отримаємо шукане значення похідної:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} 2x = 2x .$$

У даному випадку невідомою виступає $\Delta x$, тому можна стверджувати, що число $2x = const$, а одна з основних теорем про границі стверджує, що границя сталої дорівнює цій сталій. Отже, $f'(x) = (x^2)' = 2x$.

**Відповідь:** *2x.*

## 3. Геометричний, фізичний та економічний зміст похідної. Зв’язок між неперервністю та диференційованістю

***Геометричний зміст похідної***. Похідна функції $y = f(x)$ в точці $x_0$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функцій у цій точці (див. мал.56), тобто

$$f'(x_0) = k = tg\alpha . \tag{9.8}$$

Можна записати ***рівняння дотичної до графіка функції в цій точці*** як рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, що проходить через дану точку:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{9.9}$$

***Означення. Нормаллю*** *до графіка функції в даній точці називається пряма, яка перпендикулярна до дотичної в цій точці.* ***Рівняння нормалі до графіка функції*** $y = f(x)$ ***в точці*** $x_0$ матиме вигляд:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{9.10}$$

***Фізичний (механічний) зміст похідної***. Швидкість у даний момент часу – це похідна від пройденого шляху $S(t)$ за часом $t$, тобто

$$v = S'(t). \tag{9.11}$$

***Економічний зміст похідної.*** Похідна від обсягу випущеної продукції по часу є продуктивністю праці в момент $t_0$, тобто

$$P = u'(t_0) . \tag{9.12}$$

Зв’язок між неперервністю та диференційованістю функції в точці встановлює така теорема.

***Теорема**. Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в точці $x_0$, то вона в цій точці неперервна.*

Обернене твердження неправильне: існують неперервні функції, які в деяких випадках не є диференційованими. Тобто неперервність функції в точці є лише необхідною умовою диференційованості в цій точці.

**Завдання 83.** Дослідіть, чи диференційована в точці $x_0 = 0$ неперервна функція $y = \sqrt[3]{x}$.

*Розв'язання*

За означенням похідної обчислимо границю:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{0 + \Delta x} - \sqrt[3]{0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = \infty .$$

За умовою функція неперервна, а згідно з проведеним дослідженням її похідна нескінченна. Тому дана функція в точці $x_0 = 0$ недиференційована.

**Відповідь:** функція недиференційована в точці $x_0 = 0$.

## <u>4. Похідні основних функцій. Основні правила диференціювання</u>

Користуючись означенням похідної, можна обчислити похідні основних функцій. Зобразимо їх у вигляді таблиці (таблиця 9.1).

Таблиця 9.1

**Похідні основних функцій**

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|---|
| **1** | **2** | **3** | **4** |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ | $tgx$ | $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $ctgx$ | $\dfrac{-1}{\sin^2 x}$ |
| $a^x, (a>0, a \neq 1)$ | $a^x \ln a$ | $\arcsin x$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\ln x$ | $\dfrac{1}{x}$ | $\arccos x$ | $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\log_a x$ | $\dfrac{1}{x \ln a}$ | $arctgx$ | $\dfrac{1}{1+x^2}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $arcctgx$ | $\dfrac{-1}{1+x^2}$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $\sqrt{x}$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ |

Рідко функції, похідні яких потрібно знайти, задані в табличному вигляді. Частіше їх зводять до табличного за допомогою правил диференціювання.

### *Основні правила диференціювання*

1) Сталий множник можна винести за знак похідної:

$$(c \cdot u)' = c \cdot u'. \tag{9.13}$$

2) Похідна алгебраїчної суми дорівнює алгебраїчній сумі похідних:

$$\left(u \pm v\right)' = u' \pm v' . \qquad (9.14)$$

3) Похідна добутку двох функцій обчислюється за формулою:

$$\left(u \cdot v\right)' = u'v + v'u . \qquad (9.15)$$

4) Похідна частки двох функцій обчислюється за формулою:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} . \qquad (9.16)$$

5) Похідна добутку трьох функцій буде дорівнювати:

$$\left(uvg\right)' = u'vg + uv'g + uvg' , \qquad (9.17)$$

де $u$, $v$ , $g$ – довільні функції від $x$.

**5. Диференціювання складеної, логарифмічної та оберненої функцій**

Розглянемо деяку функцію $y = f(u)$, де $u = g(x)$. Тобто задано функцію $y = f\left(g(x)\right)$, яка називається ***функцією від функції***, або ***складеною функцією***, причому $y = f(u)$ називається ***зовнішньою***, а $u = g(x)$ – ***внутрішньою*** функціями.

Для того, щоб обчислити похідну складеної функції, необхідно скористатись ***правилом диференціювання складеної функції***:

якщо функція $y = f(u)$ має похідну $y'_u$, а функція $u = g(x)$ має похідну $u'_x$, то ***похідна складеної функції*** знаходиться за формулою:

$$y' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x) \qquad (9.18)$$

Тобто похідна складеної функції дорівнює похідній зовнішньої функції на похідну внутрішньої.

**Завдання 84.** Обчисліть похідну функції $y = tg^2 4x$.

*Розв'язання*

Дану функцію можна записати у вигляді:

$$y = tg^2 4x = (tg4x)^2.$$

Вона складається з трьох функцій: зовнішньої (піднесення до квадрата) та двох внутрішніх. Перша внутрішня – тангенс, друга внутрішня – $4x$. Користуючись правилом диференціювання складеної функції, маємо:

$$y' = \left((tg4x)^2\right)' \cdot (tg4x)' \cdot (4x)' = 2tg4x \cdot \frac{1}{\cos^2 4x} \cdot 4 = \frac{8tg4x}{\cos^2 4x}.$$

**Відповідь:** $\dfrac{8tg4x}{\cos^2 4x}$.

У багатьох випадках функція являє собою добуток декількох множників або може бути записана у вигляді $y = \left(u(x)\right)^{v(x)}$. Тоді для обчислення похідної дану функцію спочатку логарифмують, а потім шукають похідну.

***Принцип логарифмічного диференціювання*** покажемо на конкретних прикладах.

**Завдання 85.** Обчисліть похідну функції:

$$y=(2x-3)^3\cdot(3x+2)^{-3}\cdot(x+4)^6\cdot(\frac{x}{2}-3)^2.$$

*Розв'язання*

Запропонована для дослідження функція подана у вигляді добутку чотирьох множників. Прологарифмуємо дану функцію та скористаємось основними властивостями логарифмів:

$$\ln y=\ln\left(\left(2x-3\right)^3\left(3x+2\right)^{-3}\left(x+4\right)^6\left(\frac{x}{2}-3\right)^2\right);$$

$$\ln y=\ln(2x-3)^3+\ln(3x+2)^{-3}+\ln(x+4)^6+\ln\left(\frac{x}{2}-3\right)^2;$$

$$\ln y=3\ln(2x-3)-3\ln(3x+2)+6\ln(x+4)+2\ln\left(\frac{x}{2}-3\right).$$

Будемо знаходити похідну алгебраїчної суми:

$$(\ln y)'=3(\ln(2x-3))'-3(\ln(3x+2))'+6(\ln(x+4))'+2\left(\ln\left(\frac{x}{2}-3\right)\right)';$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=3\cdot\frac{1}{2x-3}\cdot 2-3\cdot\frac{1}{3x+2}\cdot 3+6\cdot\frac{1}{x+4}\cdot 1+2\cdot\frac{1}{\frac{x}{2}-3}\cdot\frac{1}{2};$$

$$y'=y\cdot\left(\frac{6}{2x-3}-\frac{9}{3x+2}+\frac{6}{x+4}+\frac{1}{\frac{x}{2}-3}\right).$$

Підставимо початкове значення функції в отриману похідну:

$$y'=(2x-3)^3(3x+2)^{-3}(x+4)^6\left(\frac{x}{2}-3\right)^2\left(\frac{6}{2x-3}-\frac{9}{3x+2}+\frac{6}{x+4}+\frac{1}{\frac{x}{2}-3}\right).$$

**Відповідь:**

$$y'=(2x-3)^3(3x+2)^{-3}(x+4)^6\left(\frac{x}{2}-3\right)^2\left(\frac{6}{2x-3}-\frac{9}{3x+2}+\frac{6}{x+4}+\frac{1}{\frac{x}{2}-3}\right).$$

**Завдання 86**. Обчисліть похідну функції $y=(\sin x)^{x}$.

*Розв'язання*

Функція задана у вигляді $y=\left(u(x)\right)^{v(x)}$, тому для знаходження похідної прологарифмуємо її:

$$\ln y=\ln(\sin x)^{x};$$

$$\ln y=x\cdot\ln(\sin x);$$

$$(\ln x)'=x'\cdot\ln(\sin x)+x\cdot(\ln(\sin x))'\cdot(\sin x)';$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\ln(\sin x)+x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x;$$

$$y'=y\left(\ln(\sin x)+\frac{x\cdot\cos x}{\sin x}\right);$$

$$y'=(\sin x)^{x}\cdot\left(\ln(\sin x)+\frac{x\cdot\cos x}{\sin x}\right).$$

**Відповідь:** $y'=(\sin x)^{x}\cdot\left(\ln(\sin x)+\dfrac{x\cdot\cos x}{\sin x}\right).$

Розглянемо функцію $x=\varphi(y)$, де $y$ – аргумент, а $x$ – функція. Отримаємо функцію ***обернену*** до $y=f(x)$.

***Теорема:*** *Якщо функція $y=f(x)$ має похідну, що не дорівнює нулю, то похідна оберненої функції знаходиться за формулою:*

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}. \qquad (9.19)$$

**Завдання 87.** Обчисліть похідну функції оберненої до функції $y = \sin x$.

*Розв'язання*

Якщо $y = \sin x$, то $y' = \cos x$. Тоді, користуючись формулою для знаходження похідної оберненої функції, отримаємо:

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

**Відповідь:** $\varphi'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

## 6. Похідна функції заданої неявно. Похідні вищих порядків

Якщо функція задана рівнянням $y = f(x)$, розв'язаним відносно залежної змінної $y$, то кажуть, що функція задана у явній формі або є явною.

*Під неявним заданням функції розуміють задання функції у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$, нерозв'язаного відносно залежної змінної.*

Це рівняння задає функцію лише тоді, коли множина впорядкованих пар чисел $(x; y)$, які є розв'язком даного рівняння, така, що будь-якому числу $x_0$ у цій множині відповідає не більше однієї пари $(x_0; y_0)$ з першим елементом $x_0$.

| **Приклад неявного задання функції** | **Приклад функції, що не задана неявно** |
|---|---|
| $2x + 3y - 1 = 0$, бо значенню $x_0 = 2$ відповідає одна пара чисел $(2;-1)$. | $x^2 + y^2 = 4$, бо значенню $x_0 = \sqrt{3}$ відповідає дві пари чисел $(\sqrt{3};1)$, $(\sqrt{3};-1)$. |

***<u>Зауваження.</u>*** Довільну явно задану функцію $y = f(x)$ можна записати як неявно задану рівнянням

$$f(x) - y = 0\,, \tag{9.20}$$

але не навпаки.

Неявна форма запису функції є більш загальною, як явна, адже, наприклад, неявну функцію $e^y - x + y = 0$ явно записати не можна, бо це рівняння не можна розв'язати відносно $y$.

Неявно задану функцію також можна продиференціювати.

**Правило.** *Щоб знайти похідну від неявно заданої функції, потрібно взяти похідну по $x$ від обох частин рівності $F(x, y) = 0$, вважаючи $y$ функцією від $x$, і одержане рівняння розв'язати відносно $y'$.*

**Завдання 88.** Продиференціюйте функцію $x^2 + y^2 - 2y + 3x = 1$.

*Розв'язання*

Знайдемо похідну від обох частин заданої рівності по $x$:

$$\left(x^2 + y^2 - 2y + 3x\right)' = (1)'.$$

Використаємо основне правило диференціювання алгебраїчної суми декількох функцій:

$$(x^2)' + (y^2)' - (2y)' + (3x)' = 0.$$

Оскільки $y = y(x)$, то $y^2$ – це складена функція, похідна якої $(y^2)' = 2y \cdot y'$. Тоді матимемо:

$$2x + 2yy' - 2y' + 3 = 0.$$

Розв'яжемо отримане рівняння відносно $y'$:

$$2yy' - 2y' = -2x - 3;$$

$$y'(2y - 2) = -2x - 3;$$

$$y' = \frac{-2x-3}{2y-2} \qquad \text{або} \qquad y' = \frac{2x+3}{2-2y}.$$

**Відповідь:** $y' = \dfrac{2x+3}{2-2y}$.

Похідну $y' = f'(x)$ називають ще ***похідною першого порядку***. Але, якщо розглядати функцію $y = f(x)$, то похідна $y' = f'(x)$ також може бути деякою функцією, тому від неї можна знову знайти похідну.

***Означення. Похідна другого порядку*** *– це похідна від похідної першого порядку.*

Похідна другого порядку позначається та обчислюється за такою формулою:

$$y''(x) = f''(x) = y_{x^2} = \frac{d^2y}{dx^2} = (f'(x))'. \qquad (9.21)$$

**Завдання 89.** Знайдіть похідну другого порядку від функції $y = \sin x$.

*Розв'язання*

На основі означення похідної другого порядку як похідної від похідної першого порядку робимо висновок про те, що спочатку потрібно обчислити похідну першого порядку для даної функції:

$$y' = 2\sin x \cos x = \sin 2x.$$

Одержана нова функція, яка також залежить від невідомої $x$ і є складеною функцією. Тому знайдемо ще раз похідну, але вже від нової, складеної функції:

$$y'' = (y')' = (\sin 2x)' = 2\cos 2x.$$

**Відповідь:** $y'' = 2\cos 2x$.

***Означення.*** ***Похідна n-го порядку*** *– це похідна від похідної (n–1)-го порядку, тобто*

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'. \qquad (9.22)$$

**Завдання 90.** Обчисліть $y^{(100)}$ від функції $y = e^{2x}$.

*Розв'язання*

Проведемо процес розв'язування поступово. Обчислимо похідну першого порядку:

$$y' = 2e^{2x}.$$

Знайдені значення похідних другого та третього порядку:

$$y'' = 2\cdot(e^{2x})' = 2\cdot 2e^{2x} = 2^2 e^{2x},$$

$$y''' = 2^2\cdot(e^{2x})' = 2^3 e^{2x}$$

дають можливість побачити закономірність, що дозволяє записати шукану похідну:

$$y^{(100)} = 2^{100}\cdot e^{2x}.$$

**Відповідь:** $y^{(100)} = 2^{100}\cdot e^{2x}$.

Поняття функції однієї змінної дозволяє сформулювати ***механічний (фізичний) зміст похідної 2–го порядку***: прискорення в даний момент часу – це друга похідна від пройденого шляху $S(t)$ за часом $t$, тобто

$$a = s''(t), \qquad (9.23)$$

де $a$ – прискорення руху даної точки.

**У результаті вивчення теми необхідно:**

| *знати* | *вміти* |
| --- | --- |
| - означення похідної;<br>- зв’язок між неперервністю та диференційованістю функцій;<br>- основні правила диференціювання;<br>- таблицю похідних основних елементарних функцій;<br>- економічний зміст похідної. | - вільно володіти технікою диференціювання складених функцій;<br>- обчислювати похідні, використовуючи логарифмічне диференціювання;<br>- обчислювати похідні функцій, заданих неявно. |

**Питання для самоконтролю**

1. Сформулюйте означення похідної.
2. Як за допомогою означення знайти похідну функції?
3. У чому полягає геометричний зміст похідної?
4. Сформулюйте механічний зміст похідної.
5. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції у даній точці.
6. Дайте означення нормалі та запишіть її рівняння.
7. Запишіть основні похідні елементарних функцій.
8. Сформулюйте та запишіть основні правила диференціювання.
9. Яка функція називається складеною? Як продиференціювати складену функцію?
10. У яких випадках можна використовувати принцип логарифмічного диференціювання? Поясніть його суть.
11. Яка функція називається оберненою? Як знайти похідну оберненої функції?

# ТЕМА 10. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

***План***

1. *Означення диференціала та правила його знаходження. Геометричний та економічний зміст диференціала.*
2. *Застосування диференціала до наближених обчислень.*
3. *Застосування похідної до розв'язування задач економічного змісту.*

*<u>Основні терміни та поняття:</u>* похідна, диференціал функції, диференціал аргументу, лінійна частина приросту, нескінченно мала величина, правила знаходження диференціала, геометричний та економічний зміст диференціала, наближені обчислення, еластичність попиту, коефіцієнт еластичності.

## <u>1. Означення диференціала та правила його знаходження. Геометричний та економічний зміст диференціала</u>

Розглянемо диференціальну функцію $y = f(x)$. Згідно з означенням похідної:

$$f'(x) = y'_x = \frac{dy}{dx} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} .$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то останню рівність можна записати у вигляді:

$$f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} + \alpha ,$$

де $\alpha$ – нескінченно мала величина. Звідси виразимо приріст функції $\Delta y$:

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x - \alpha \cdot \Delta x . \qquad (10.1)$$

З даної формули видно, що приріст функції складається з двох доданків:

*1 доданок* – тобто $f'(x)\Delta x$ – це лінійна частина приросту функції, яка ще називається головною частиною;

*2 доданок* – $\alpha\Delta x$ – це нескінченно мала величина.

***Означення.*** ***Диференціалом функції*** *називається головна частина простору цієї функції:*

$$dy = f'(x)\cdot\Delta x\,. \qquad (10.2)$$

Диференціал $dy$ називають також ***диференціалом першого порядку***.

Якщо $y = x$, то $y' = x' = 1$, тому $dy = dx = \Delta x$, тобто диференціал $dx$ незалежної змінної $x$ збігається з її приростом $\Delta x$. Тому формулу (10.2) можна переписати у вигляді:

$$dy = f'(x)\cdot\Delta x = f'(x)dx\,, \qquad (10.3)$$

яка *використовується на практиці для обчислення диференціала* функції.

***Зауваження.*** З формули (10.3) випливає, що $y' = f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$. Саме тому похідну часто позначають $\dfrac{dy}{dx}$ або $\dfrac{df}{dx}$ і розуміють її як відношення двох диференціалів: диференціала функції до диференціала аргументу.

Оскільки диференціал функції дорівнює добутку її похідної на диференціал незалежної змінної, то властивості диференціала можна легко дістати з відповідних властивостей похідної. Якщо, наприклад, $u$ і $v$ – функції від $x$, похідна яких існує, та $C$ – довільна стала, то маємо такі ***правила знаходження диференціалів***:

1. $dC = 0$;
2. $d(C\cdot u) = C\cdot du$;
3. $d(u\pm v) = du \pm dv$;
4. $d(uv) = v\cdot du + u\cdot dv$;
5. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\cdot du - u\cdot dv}{v^2}$.

## *СТОРІНКА ІСТОРІЇ*

***Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646–1716)*** *– провідний німецький філософ, логік, математик, фізик, мовознавець та дипломат. Передбачив принципи сучасної комбінаторики. Створив першу механічну лічильну машину, здатну виконувати додавання, віднімання, множення й ділення. Він отримав: ступінь магістра філософії за дисертацію, що поєднувала аспекти філософії та права з деякими математичними ідеями; ступінь бакалавра права, працює над докторською дисертацією з філософії (1666). Проте Лейбніцу було відмовлено у ступені доктора права в Лейпцигу, але він отримав його через рік у Нюрберзькому університеті за інше дисертаційне дослідження. Проте він вирішує обрати кар'єру дипломата і юриста.*

*У 1700 році Лейбніц засновує Берлінську академію наук і стає її першим президентом. Був обраний іноземним членом Французької академії наук. Мав надзвичайно широке коло наукових кореспондентів, багато з ідей викладено в рукописах і листуванні, що ще й досі повністю не надруковано. Так, лише в середині XIX століття побачили світ рукописи, де описуються розроблені вченим основи теорії детермінантів (визначників).*

*Створюючи числення нескінченно малих, Лейбніц постійно конкурував з Ньютоном, хоча вони міркували різними способами. Зокрема Лейбніц у 1675 році записав знак* $d$ *(перша буква латинського слова, що означає "різниця", або ж приріс аргументу і приріст функції – різниці цих значень) нескінченно малого приросту величини, перед якою його поставлено –* $dx, dy$*; при розгляді геометричного змісту похідної користувався не поняттям похідної, а диференціалом та відношенням диференціалів. У 1684 році видає першу друковану роботу, в якій викладалися основні поняття і методи диференціального числення: основні правила диференціювання, даються основні вказівки, як застосовувати диференціали для дослідження максимумів та мінімумів і точок перегину кривої. Тут вперше згадується словосполучення "диференціальне числення".*

**Завдання 91.** Знайдіть диференціали функцій: 1) $y = ctg^2 x$;

2) $y = \sqrt{1 + \ln x}$.

*Розв'язання*

Для розв'язання даного завдання скористаємось формулою (10.3) для обчислення диференціала на практиці:

1) $dy = 2ctgx \cdot \left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)dx = -\dfrac{2ctgx}{\sin^2 x}dx$;

2) $dy = \dfrac{1}{2\sqrt{1+\ln x}} \cdot \dfrac{1}{x}dx = \dfrac{dx}{2x\sqrt{1+\ln x}}$.

**Відповідь:** 1) $dy = -\dfrac{2ctgx}{\sin^2 x}dx$; 2) $dy = \dfrac{dx}{2x\sqrt{1+\ln x}}$.

***Геометричний зміст диференціала*** $dy$ функції $y = f(x)$ полягає в тому, що він є приростом ординати, дотичної до графіка функції в деякій точці $M(x; f(x))$.

Розглядаючи задачі, що приводять до поняття похідної, ми ввели поняття граничних витрат виробництва і граничної виручки. Нагадаємо, що границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta K}{\Delta x} = K'(x)$ називається граничними витратами виробництва.

Диференціал функції $K(x)$, яка визначає витрати на виробництво $x$ одиниць однорідної продукції, дорівнює:

$$dK(x) = K'(x)\Delta x. \tag{10.4}$$

Якщо обсяг продукції дорівнює $x_0$ одиниць, а $\Delta x = x_1 - x_0 = m$. Тоді $dK(x) = K'(x_0) \cdot m$.

**Економічний зміст диференціала**: диференціал функції $K(x)$ виражає витрати на виробництво наступних $m$ одиниць продукції за умови, що граничні витрати зберігаються сталими й дорівнюють числу $K'(x_0)$. Іншими словами, швидкість зміни функції $K(x)$ на відрізку $[x_0; x_0 + m]$ вважається сталою і дорівнює $K'(x_0)$.

Аналогічно, якщо позначити через $U(x)$ виручку від продажу $x$ одиниць товару, то границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U(x)}{\Delta x} = U'(x) \qquad (10.5)$$

називається **граничною виручкою**.

Звідси маємо:

$$dU(x) = U'(x)\Delta x. \qquad (10.6)$$

Нехай попит на товар зріс від $x = x_0$ одиниць до $x = x_0 + m$ одиниць, тобто $\Delta x = x_1 - x_0 = m$. Тоді

$$dU(x) = U'(x_0)m. \qquad (10.7)$$

Отже, **економічний зміст диференціала** в цьому випадку можна сформулювати так: диференціал функції $U(x)$ виражає виручку, яку дістанемо, якщо зросте від $x_0$ до $x_0 + m$ одиниць за умови, що гранична виручка зберігається сталою і дорівнює числу $U'(x_0)$.

**Завдання 92.** Витрати виробництва $K$ залежно від обсягу продукції $x$ визначаються за формулою: $K = 100x - \frac{1}{30}x^3$. При обсязі виробництва в 5 одиниць продукції визначте витрати на виготовлення наступної (шостої) одиниці продукції.

*Розв'язання*

Граничні витрати можна обчислити як похідну функції $K(x)$ в точці $x_0 = 5$. Отже,

$$K'(x) = 100 - \frac{1}{30} \cdot 3x^2 = 100 - \frac{1}{10}x^2;$$

$$K'(5) = 100 - \frac{1}{10} \cdot 5^2 = 97{,}5 .$$

За економічним змістом диференціала:

$\Delta K(x) \approx dK(x) = K'(5) \cdot \Delta x$ .

Приріст аргументу – це величина між наступною та попередньою одиницею продукції, тобто $\Delta x = 6 - 5 = 1$. Отже,

$\Delta K(x) = K'(5) \cdot \Delta x = 97{,}5 \cdot 1 = 97{,}5$ .

**Відповідь:** якщо обсяг виробництва зростає з 5 до 6 одиниць продукції, то витрати зростають приблизно на 97,5.

Розглянемо найпростішу економічну модель, яка описує динаміку росту прибутку залежно від інвестицій:

$$P = S + I , \qquad (10.8)$$

де $P$ – прибуток; $S$ – споживання; $I$ – інвестиції.

Відомо, що прибуток і споживання залежать від інвестицій: $P = P(I)$ і $S = S(P)$. Виникає питання: як впливає зміна інвестицій $dI$ на зміну прибутку $dP$?

Оскільки за (11.3)

$$dP = P'(I)dI , \text{ або } P'(I) = \frac{dP}{dI}, \qquad (10.9)$$

то з рівняння

$$P = S(P) + I = S(P(I)) + I \qquad (10.10)$$

знайдемо залежність між інвестиціями й швидкістю росту прибутку, обчисливши похідну правої і лівої його частини як похідну складеної функції:

$$P'(I) = \frac{dS}{dP} \cdot P'(I) + 1 . \qquad (10.11)$$

Звідси знайдемо значення $P'(I)$:

$$P'(I) = \frac{1}{1 - \frac{dS}{dP}} .$$

Врахувавши (10.9), матимемо:

$$dP = \frac{1}{1 - \frac{dS}{dP}} dI . \qquad (10.12)$$

***Означення.*** *Вираз* $\dfrac{1}{1-\dfrac{dS}{dP}}$ *називають* ***мультиплікатором*** ***(позначають*** $\mu$ *) – числовим коефіцієнтом, який показує, в скільки разів сума приросту або скорочення прибутку перевищує початкову суму інвестицій.*

У моделі, що нами розглядається, маємо: якщо $0 < \dfrac{dS}{dP} < 1$, то $\mu = \dfrac{1}{1-\dfrac{dS}{dP}} > 1$. Отже, додаткові інвестиції збільшуватимуть прибуток.

## 2. Застосування диференціала до наближених обчислень

Як уже зазначалося, приріст $\Delta y$ функції $y = f(x)$ у точці $x$ можна наближено замінити диференціалом $dy$ в цій точці: $\Delta y \approx dy$.

Оскільки $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, а $dy = f'(x)\Delta x$, то

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

або

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x . \qquad (10.13)$$

Наближена рівність (10.13) лежить в основі застосувань диференціала до наближених обчислень. Ця рівність особливо зручна у випадку, коли $f(x)$ і $f'(x)$ легко обчислюються.

**Завдання 93**. Користуючись диференціалом, наближено обчислити $arctg1{,}05$.

*Розв'язання*

Використовуючи формулу (10.13), маємо, що $arctg1{,}05 = arctg(x + \Delta x)$. Значення 1,05 можна записати у вигляді суми цілої та дробової частини: $1{,}05 = 1 + 0{,}05$, тобто

$$x = 1,\ \Delta x = 0{,}05.$$

За умовою завдання визначаємо, що $f(x) = arctgx$, тоді $f(x + \Delta x) = arctg(x + \Delta x)$, $f'(x) = (arctgx)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$. За (10.13) матимемо:

$arctg(x + \Delta x) \approx arctgx + \dfrac{1}{1 + x^2} \cdot \Delta x$, тобто

$$arctg(x + \Delta x) \approx arctgx + \frac{\Delta x}{1 + x^2}.$$

Тоді

$$arctg1{,}05 \approx arctg1 + \frac{0{,}05}{1 + 1^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{0{,}05}{2} = \frac{3{,}14}{4} + 0{,}025 \approx 0{,}811.$$

**Відповідь:** $arctg1{,}05 \approx 0{,}811$.

## 3. Застосування похідної до розв'язування економічних задач

Для дослідження економічних процесів і розв'язування інших прикладних задач часто використовують поняття еластичності функції.

Розглянемо в таблиці (10.1) різні точки зору на поняття ***еластичності попиту за ціною***.

Таблиця 10.1

***Еластичності попиту за ціною***.

| *З математичної точки зору* | *З економічної точки зору* |
|---|---|
| 1 | 2 |
| Два підходи до поняття еластичності:<br>1) *прирісний* дає можливість з'ясувати, як міняється значення функції $(y)$, коли змінюється на одиницю незалежна змінна $(x)$; | |

<table>
<tr><td colspan="2">2) темповий дає можливість з’ясувати, на скільки відсотків зміниться значення функції, якщо незалежна змінна зміниться на 1%.</td></tr>
<tr><td>Використовується <u>прирісний підхід</u>:<br>еластичністю попиту відносно ціни називається границя:<br>$E_p(q) = E_n = \lim\limits_{\Delta p \to 0}\left(\frac{\Delta q}{q} \div \frac{\Delta p}{p}\right) = \frac{p}{q}\lim\limits_{\Delta p \to 0}\frac{\Delta q}{\Delta p}$<br>Тобто,<br>$E_n = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$. (10.14)<br>Для того, щоб уникнути від’ємних чисел, при вивченні еластичності покладають $E_n = -\frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$, і при цьому $E_n$ називають коефіцієнтом еластичності.</td><td>Найчастіше використовується <u>темповий підхід</u>, бо використання похідної не завжди є зручним (досліджуються прирости, які завжди пов’язані з відповідними одиницями виміру):<br>еластичність попиту від ціни товару розраховується за формулою:<br>$E_{Ц}^{П} = \frac{\%\Delta К}{\%\Delta Ц}$, (10.15)<br>де $\Delta К$ – зміна кількості товару;<br>$\Delta Ц$ – зміна ціни.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Найпростіші задачі на обчислення еластичності</td></tr>
<tr><td>Знайдіть еластичність попиту для функції $q = 4 - 2p$.<br>Розв’язання: за формулою (10.14) маємо:<br>$E_n = -\frac{p}{q}\frac{dq}{dp} = -\frac{p}{q}f'(q) = -\frac{p}{4-2p}(4-2p)' =$<br>$= \frac{p}{2-p}$.<br>Якщо, наприклад, $p = 1{,}5$, то $E_n = 3$. Це означає, що за ціною $p = 1{,}5$ підвищення ціни на 1% викличе зниження попиту на 3%.</td><td>Визначте цінову еластичність на годинники, якщо відсоток зміни ціни 20%, а відсоток зміни кількості 40%.<br>Розв’язання: за формулою (10.15) маємо:<br>$E_{Ц}^{П} = \frac{\%\Delta К}{\%\Delta Ц} = \frac{40\%}{20\%} = 2$ ·<br>Тобто підвищення ціни на 1% викличе зниження попиту на 2%.</td></tr>
</table>

При визначенні еластичності варто пам’ятати, що:

- якщо $E_p(q) > 1$, то підвищення ціни на 1% відповідає зниженню попиту більш ніж на 1%. Говорять, що в цьому випадку попит *еластичний*;
- якщо $E_p(q) = 1$, то підвищення ціни на 1% відповідає зниженню попиту рівно на 1% – *нейтральний* попит;
- якщо $E_p(q) < 1$, то підвищення ціни на 1% відповідає зниженню попиту менш ніж на 1%. Такий попит *нееластичний.*

***Еластичність попиту*** $q$ ***за доходом*** $R$:

$$E_R(q) = \frac{dq}{q} : \frac{dR}{R} = \frac{R}{q} \cdot \frac{dq}{dR} \qquad (10.16)$$

виражає відносну зміну (у відсотках) попиту на будь-який товар або послугу в разі зміни доходу споживачів цього блага на 1%.

Додатна еластичність попиту за доходом характеризує нормальні (якісні) товари, а від’ємна – малоцінні (низькоякісні).

Так, високий додатний коефіцієнт еластичності попиту за доходом галузі означає, що її внесок в економічне зростання більший, ніж частка в структурі економіки, й вона має шанси на розширення і розвиток у майбутньому. І навпаки, якщо коефіцієнт еластичності попиту на продукцію галузі за доходом має невелике додатне чи від’ємне значення, то на неї очікують застій і перспектива скорочення виробництва.

Якщо попит *нееластичний,* то зміна ціни спричиняє зміну доходу в тому самому напрямі, й продавцям вигідно підвищувати ціну (що веде до збільшення їхнього доходу). За еластичного попиту зміна доходу відбувається в напрямі, протилежному зміні ціни, й для цього підвищення продавцям вигідно буде знижувати ціну на товар. Підвищення ж податку на товар з еластичним попитом зумовлює скорочення доходу від оподаткування.

Якщо попит *еластичний*, то дохід збільшується із збільшенням кількості товару або зменшенням ціни.

Наведемо ще один приклад використання поняття похідної в економіці.

**Завдання 94**. Обсяг продукції $u$, виробленої бригадою робітників, можна описати рівнянням:

$u = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50$ (од.), $1 \le t \le 8$, де $t$ – робочий час, год. Обчисліть продуктивність праці, швидкість і темпи її зміни через годину після початку роботи і за годину до її закінчення.

*Розв'язання*

Продуктивність праці виражається похідною:

$$z(t) = u'(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100 \text{ (од./год.)},$$

а швидкість і темп зміни продуктивності – відповідно похідною $z'(t)$ і логарифмічною похідною $T_z(t) = \left[\ln z(t)\right]$:

$$T_z(t) = \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{-5t + 15}{-\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100} = \frac{2t - 6}{t^2 - 6t - 40} \text{ (од/год.)},$$

де $z'(t) = -5t + 15$ (од./год.$^2$).

У задані моменти часу $t_1 = 1$ і $t_2 = 8 - 1 = 7$ відповідно маємо:

| | | |
|---|---|---|
| $z(1) = 112{,}5$ (од./год.), | | $z(7) = 82{,}5$ (од./год.), |
| $z'(1) = 10$ (од./год.$^2$), | і | $z'(7) = -20$ (од./год.$^2$), |
| $T_z(1) = 0{,}09$ (од./год.), | | $T_z(7) = -0{,}24$ (од./год.). |

**Відповідь:** по закінченні роботи продуктивність праці суттєво знижується; при цьому зміна знака $z'(t)$ і $T_z(t)$ із "+" на "–" свідчить про те, що підвищення продуктивності праці в перші години робочого дня змінюється її зниженням в останні години.

**У результаті вивчення теми необхідно:**

| *знати* | *вміти* |
|---|---|
| - поняття диференціала, його геометричний та *економічний зміст*;<br>- правила знаходження диференціала. | - знаходити диференціали першого порядку;<br>- застосовувати диференціал до наближених обчислень;<br>- використовувати похідну для розв'язування задач професійного спрямування (економічного змісту), аналізувати отримані результати та робити висновки "мовою економіки". |

**Питання для самоконтролю**

1. Сформулюйте означення диференціала першого порядку функції однієї змінної.
2. Запишіть формулу, що дозволяє на практиці обчислити диференціал функції?
3. Які правила використовуються для обчислення диференціала функції?
4. Сформулюйте геометричний та економічний зміст диференціала.
5. Для вирішення яких завдань можна застосувати диференціал функції однієї змінної? Яка при цьому використовується формула?
6. Який підхід до введення поняття "еластичність" використовується в математиці? А в економіці?
7. Сформулюйте поняття еластичності попиту відносно ціни та запишіть формули для її обчислення.

# ТЕМА 11. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

***План***

1. *Дослідження функції на зростання (спадання).*
2. *Необхідні та достатні умови екстремуму функції. Дослідження функції на екстремум.*
3. *Дослідження на найбільше та найменше значення функції на відрізку.*
4. *Дослідження функції однієї змінної на опуклість (вгнутість).*
5. *Повне дослідження функцій за допомогою похідної.*
6. *Теореми про середнє значення (теореми Ролля, Лагранжа, Коші).*
7. *Правило Лопіталя для розкриття невизначеності.*
8. *Оптимізація в економічних задачах.*

*Основні терміни та поняття:* зростаюча та спадна функція, інтервали монотонності, схема дослідження, локальний мінімум, локальний максимум, точки екстремуму, екстремуми функції; найбільше та найменше значення функції; опуклість; вгнутість; точки перегину; загальне дослідження функції; горизонтальні, вертикальні, похилі асимптоти; теореми Ролля, Лагранжа, Коші; правило Лопіталя; оптимальний випуск продукції, оптимальний прибуток.

## 1. Дослідження функції на зростання (спадання)

Нагадаємо означення зростаючої та спадної функцій.

Нехай функція *y=f(x)* визначена на деякому проміжку $[a;b]$, а $x_0 \in [a;b]$.

***Означення.*** *Функція y=f(x) називається*

| ***зростаючою*** | ***спадною*** |
|---|---|

*в точці* $x_0$*, якщо існує інтервал* $\left(x_0-\delta;x_0+\delta\right)$*, де δ>0, який міститься у проміжку* $\left[a;b\right]$ *і такий, що*

| | |
|---|---|
| $f(x)<f(x_0)$, *для x*$\in\left(x_0-\delta;x_0\right)$ *і* $f(x)>f(x_0)$ , *для x*$\in\left(x_0;x_0+\delta\right)$. | $f(x)>f(x_0)$, *для x*$\in\left(x_0-\delta;x_0\right)$ *і* $f(x)<f(x_0)$ , *для x*$\in\left(x_0;x_0+\delta\right)$. |

Сформулюємо теорему, що є достатньою умовою зростання та спадання функції на інтервалі $(a;b)$.

***Теорема.*** *Якщо функція* $f(x)$ *має невід'ємну (недодатну) похідну в кожній точці інтервалу* $(a;b)$*, то функція* $f(x)$ ***зростає (спадає)*** *на даному інтервалі.*

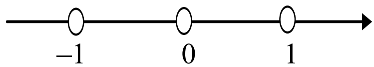
***Означення.*** *Інтервали, на яких функція зростає (спадає), називаються* ***інтервалами монотонності*** *цієї функції.*

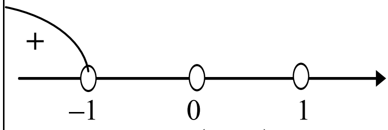
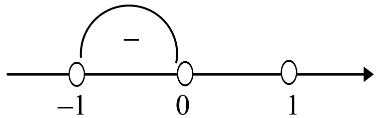
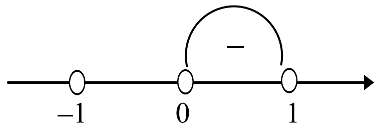
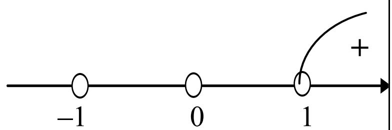
***Зауваження.*** Якщо функція зростає (спадає) на інтервалі $(a;b)$ і неперервна в точках $a$ і $b$, то вона буде зростаючою (спадною) і на відрізку $\left[a;b\right]$.

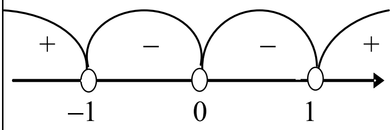
Розглянемо алгоритм дослідження функції на монотонність (таблиця 11.1).

Таблиця 11.1

**Схема дослідження функції на зростання та спадання**

| **№п.п** | **В загальному** | **Приклад** |
|---|---|---|
| **1** | **2** | **3** |
| *Знайти інтервали монотонності (проміжки зростання та спадання) функції* | | |
| | $y = f(x)$ | $f(x) = 3x + \dfrac{3}{x} + 5$ |
| 1 | Обчисліть похідну функції $f(x)$, тобто $f'(x)$. | $f'(x) = 3 - \dfrac{3}{x^2} = \dfrac{3(x^2 - 1)}{x^2}$ |
| 2 | Знайдіть *критичні точки*, тобто ті точки, в яких похідна $f'(x)$ дорівнює нулю або не існує: $f'(x) = 0$. | $f'(x) = 0$,<br>$\dfrac{3(x^2 - 1)}{x^2} = 0$,<br>$\begin{cases} 3(x^2 - 1) = 0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases}$,<br>$x^2 - 1 = 0$,<br>$x^2 = 1$,<br>$x = \pm 1$.<br>Отже, критичних точок є три: –1; 0; 1. |
| 3 | Розбийте числову вісь критичними точками на проміжки | <br> |
| 4 | Знайдіть знак похідної на кожному з проміжків. | а) При $x \in (-\infty; -1)$, наприклад, при $x = -2$:<br>$f'(-2) = 3 - \dfrac{3}{(-2)^2} = 3 - \dfrac{3}{4} > 0 \cdot$<br>*Зауваження:* важливим є знак ("+" чи "–"), а не кінцеве значення виразу. |

| | | |
|---|---|---|
| | | <br>б) При $x \in \left(-1;0\right)$. Нехай $x = -\frac{1}{2}$. Тоді:<br>$f'(-\frac{1}{2}) = 3 - \frac{3}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 3 - \frac{3}{\frac{1}{4}} = 3 - \frac{3 \cdot 4}{1} < 0$<br><br>в) При $x \in (0;1)$ (зокрема при $x = \frac{1}{2}$), маємо:<br>$f'(\frac{1}{2}) = 3 - \frac{3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 3 - \frac{3}{\frac{1}{4}} = 3 - \frac{3 \cdot 4}{1} < 0$<br> |
| | | г) При $x \in (1;+\infty)$, наприклад, при $x = 2$ маємо:<br>$f'(2) = 3 - \frac{3}{2^2} = 3 - \frac{3}{4} > 0$.<br><br>Таким чином матимемо розбиття числової осі критич- |

| | | |
|---|---|---|
| | | ними точками на проміжки з визначеним знаком похідної на кожному з них  |
| 5 | Якщо $f'(x) > 0$, то на даному інтервалі функція зростає. У випадку $f'(x) < 0$ – функція спадає. | **Відповідь:** при $x \in (-\infty;-1)\bigcup(1;+\infty)$ функція зростає, а при $x \in (-1;0)\bigcup(0;1)$ – спадає. |

## 2. Необхідні та достатні умови екстремуму функції. Дослідження функції на екстремум

***Означення.*** *Точка $x_0$ називається точкою*

| ***строгого локального мінімуму*** | ***строгого локального максимуму*** |
|---|---|

*функції $y = f(x)$, якщо при всіх $x \neq x_0$ з деякого $\delta$ – околу точки $x_0$ виконується нерівність*

| $f(x) > f(x_0)$ | $f(x) < f(x_0)$. (11.1) |
|---|---|

***Означення.*** *Якщо в деякому $\delta$ – околі точки $x_0$ виконується нерівність*

$f(x) \geq f(x_0)$ *чи* $f(x) \leq f(x_0)$, (11.2)

*то точка $x_0$ називається* ***точкою локального мінімуму*** *чи* ***локального максимуму****.*

***<u>Зауваження.</u>*** Часто для скорочення слово "локальний" не вживають. Точки мінімуму та максимуму функції називають **точками екстремуму**, а значення функції в цих точках – її **екстремумами**.

Сформулюємо необхідні та достатні умови існування екстремуму.

***Необхідна умова.*** Якщо точка $x_0$ є точкою екстремуму функції $y = f(x)$ і в цій точці функція диференційована, то

$$f'(x_0) = 0. \tag{11.3}$$

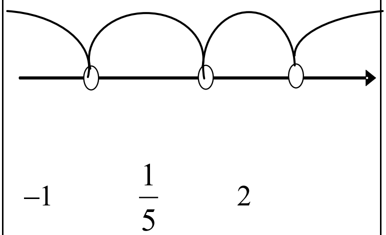
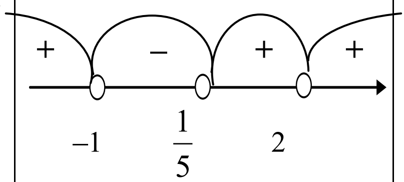
***Достатня умова.*** Якщо похідна функції $y = f(x)$ при переході зліва направо через критичну точку $x_0$ змінює свій знак з "+" на "–", то $x_0$ – точка максимуму; якщо з "–" на "+", то $x_0$ – точка мінімуму.

На основі сказаного сформулюємо алгоритм (так звана <u>перша ознака</u>) дослідження функції на екстремум і проілюструємо його застосування на конкретному прикладі (таблиця 11.2).

Таблиця 11.2

**Дослідження функції на екстремум**
**(за допомогою похідної першого порядку)**

| **№ п.п** | **В загальному** | **Приклад** |
|---|---|---|
| **1** | **2** | **3** |
| ***Дослідити на екстремум функцію*** $f(x) = (x+1)^2 \cdot (x-2)^3$ | | |
| 1 | Знайдіть область визначення функції | $D(y): x \in R$ |
| 2 | Знайдіть точки, в яких похідна першого порядку даної функції дорівнює нулю $f'(x) = 0$ або не існує, тобто критичні точки | $f'(x) = \left((x+1)^2\right)' \cdot (x-2)^3 +$ $(x+1)^2 \cdot \left((x-2)^3\right)' = 2(x+1)(x-2)^3 +$ $(x+1)^2 \cdot 3(x-2)^2 = (x+1)\cdot(x-2)^2 \cdot$ $\cdot \left(2(x-2)+3(x+1)\right) = (x+1)(x-2)^2 \cdot$ $\cdot (2x-4+3x+3) = (x+1)(x-2)^2(5x-1).$ |

| | | |
|---|---|---|
| | | $f'(x) = 0$,<br>$(x+1)\cdot(x-2)^2\cdot(5x-1) = 0$,<br>$x+1=0$, $(x-2)^2 = 0$, $5x-1=0$,<br>$x_1 = -1$, $x-2=0$, $5x=1$,<br>$x_2 = 2$, $x_3 = \dfrac{1}{5}$.<br>Знайдені точки є критичними та належать області визначення даної функції |
| 3 | Розбийте область визначення критичними точками на проміжки |  |
| 4 | Знайдіть знак похідної функції на кожному з утворених проміжків | <br>адже<br>$f'(-2) = (-2+1)(-2-2)^2(5\cdot(-2)-1) > 0$<br>$f'(0) = (0+1)(0-2)^2(5\cdot 0-1) < 0$<br>$f'(1) = (1+1)(1-2)^2(5\cdot 1-1) > 0$<br>$f'(3) = (3+1)(3-2)^2(5\cdot 3-1) > 0$ |
| 5 | Якщо похідна функції $y = f(x)$ при переході зліва направо через критичну точку змінює | Точки екстремуму:<br>$x = -1$ – точка максимуму ($max$). |

| | | |
|---|---|---|
| | свій знак з "+" на "–", то це – точка максимуму; якщо з "–" на "+", то – точка мінімуму. | $x=\frac{1}{5}$ – точка мінімуму (*min*), <br> $x=2$ – не екстремальна точка. |
| 6 | Знайдіть значення функції в точках екстремуму – екстремуми функції | $f_{\max}=f(-1)=(-1+1)^2(-1-2)^3=0$ <br> $f_{\min}=f\left(\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{1}{5}+1\right)^2\left(\frac{1}{5}-2\right)^3=$ $-\frac{36}{25}\cdot\frac{729}{125}=-\frac{26244}{3125}\approx-8{,}4.$ |
| | | **Відповідь:** <br> максимум функції $f(-1)=0$, <br> мінімум функції $f\left(\frac{1}{5}\right)\approx-8{,}4$. |

***<u>Зауваження</u>***. Результати, отримані в пунктах 3-5 проведеного дослідження, інколи подають за допомогою таблиці 11.3 .

Таблиця 11.3

**Зведені дані дослідження функції**

**$f(x)=(x+1)^2\cdot(x-2)^3$ на екстремум**

| $x$ | $(-\infty;-1)$ | $-1$ | $\left(-1;\frac{1}{5}\right)$; | $\frac{1}{5}$ | $\left(\frac{1}{5};2\right)$ | $2$ | $(2;+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | 0 | – | 0 | + | 0 | + |
| $y$ | $\nearrow$ | *max* | $\searrow$ | *min* | $\nearrow$ | | $\nearrow$ |

Дослідження функції на екстремум можна провести за допомогою похідної другого порядку. Сформулюємо ще одну ознаку дослідження функції на екстремум.

***Друга ознака (друге правило дослідження функції на екстремум).***

*Якщо в околі точки $x = x_0$ друга похідна неперервна, причому $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, то функція $y = f(x)$ має в даній точці максимум, якщо $f''(x_0) < 0$ і має в даній точці мінімум, якщо $f''(x_0) > 0$.*

Застосування даної ознаки для розв'язування конкретного завдання зводиться до поетапного виконання певних дій (див. таблицю 11.4).

Таблиця 11.4

**Дослідження функції на екстремум (за другою ознакою)**

| **№ п.п** | **В загальному** | **Приклад** |
|---|---|---|
| **1** | **2** | **3** |
| ***Дослідити функцію*** $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 2$ ***на екстремум за допомогою другої ознаки*** | | |
| 1 | Знайдіть значення похідної першого порядку $f'(x)$ | $f'(x) = \left(x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 2\right)' = \left(x^5\right)' - \left(5x^4\right)' + \left(5x^3\right)' + \left(2\right)' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2.$ |
| 2 | Знайдіть точки, в яких похідна першого порядку даної функції дорівнює нулю $f'(x) = 0$ | $f'(x) = 0$,<br>$5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0$,<br>$5x^2\left(x^2 - 4x + 3\right) = 0$,<br>$5 \neq 0$, тому $x^2 = 0$ або $x^2 - 4x + 3 = 0$,<br>$x_1 = 0$, $D = 16 - 12 = 4$, |

| | | |
|---|---|---|
| | або не існує, тобто критичні точки | $x_2 = \dfrac{4+2}{2} = 3$, $x_3 = \dfrac{4-2}{2} = 1$. |
| 3 | Знайдіть значення похідної другого порядку $f''(x)$ | $f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(5x^4 - 20x^3 + 15x^2\right)' =$<br>$= 5 \cdot \left(x^4\right)' - 20 \cdot \left(x^3\right)' + 15 \cdot \left(x^2\right)' =$<br>$= 20x^3 - 60x^2 + 30x.$ |
| 4 | Знайдіть значення похідної другого порядку в критичних точках | $f''(x_1) = f''(0) = 0$ – правило не застосовне, отже, точка $x_1 = 0$ не є екстремальною;<br><br>$f''(x_2) = f''(3) = 20 \cdot 27 - 60 \cdot 9 + 30 \cdot 3 = 90$.<br>Оскільки $f''(3) > 0$, то точка $x_2 = 3$ – точка мінімуму.<br><br>$f''(x_3) = f''(1) = 20 \cdot 1 - 60 \cdot 1 + 30 \cdot 1 = -10$.<br>Оскільки $f''(1) < 0$, то точка $x_3 = 1$ – точка максимуму. |
| 5 | Знайдіть значення функції в точках екстремуму – екстремуми функції | $f_{\max} = f(1) = 1^5 - 5 \cdot 1^4 + 5 \cdot 1^3 + 2 = 3$,<br>$f_{\min} = f(3) = 3^5 - 5 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^3 + 2 = -25$. |
| | | **Відповідь:**<br>максимум функції $f(1) = 3$;<br>мінімум функції $f(3) = -25$. |

## 3. Дослідження на найбільше та найменше значення функції на відрізку

Нехай на відрізку $[a;b]$ задана неперервна функція $y = f(x)$. Наведемо без доведення теорему, що є істотною властивістю неперервної функції.

***Теорема****. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на замкненому проміжку $[a;b]$, то вона набуває на цьому проміжку принаймні один раз своєї найбільшої і своєї найменшої величини.*

Ці числа називаються відповідно ***найбільшим і найменшим значенням функції***.

***Зауваження.*** Функція може набувати своїх найбільшого та найменшого значення як на кінцях відрізка, так і у внутрішніх його точках.

Для того, ***щоб знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку*** $[à;b]$***, необхідно*** виконати такі послідовні дії:

1) знайти похідну даної функції;
2) знайти критичні точки;
3) обчислити значення даної функції в критичних точках з проміжку $[à;b]$ і на кінцях відрізка;
4) обрати серед обчислених значень найбільше та найменше.

**Завдання 95.** Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^4 - 2x^2 + 5$ на відрізку $\left[-2;\frac{1}{2}\right]$.

*Розв'язання*

Виконаємо дослідження поетапно.

1) Знайдемо значення похідної першого порядку від даної функції:

$$y' = \left(x^4 - 2x^2 + 5\right)' = \left(x^4\right)' - \left(2x^2\right)' + (5)' = 4x^3 - 4x .$$

2) Знайдемо критичні точки, розв'язавши рівняння $f'(x)=0$, тобто

$$4x^3-4x=0;$$

$$4x(x^2-1)=0;$$

$4\neq 0$, отже, $x_1=0$ або $x^2-1=0$;

$$x^2=1;$$

$$x_2=1,\ x_3=-1.$$

3) Обчислимо значення функції в критичних точках та на кінцях відрізка, врахувавши, що точка $x_2=1$ не належить заданому відрізку $\left[-2;\frac{1}{2}\right]$:

$y(0)=0^4-2\cdot 0^2+5=5;$

$y(-1)=(-1)^4-2\cdot(-1)^2+5=1-2+5=4;$

$y(-2)=(-2)^4-2\cdot(-2)^2+5=16-8+5=13;$

$y\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^4-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+5=\frac{1}{16}-\frac{1}{2}+5=4\frac{9}{16}.$

4) На основі проведеного дослідження можемо стверджувати, що найбільшим значенням функції $y=x^4-2x^2+5$ на відрізку $\left[-2;\frac{1}{2}\right]$ є $y(-2)=13$, а найменшим – $y(-1)=4$.

**Відповідь:**

*Найбільше значення* $f(x)=f(-2)=13.$

$\left[-2;\frac{1}{2}\right]$

*Найменше значення* $f(x)=f(-1)=4.$

$\left[-2;\frac{1}{2}\right]$

## 4. Дослідження функції однієї змінної на опуклість (вгнутість)

Під час побудови графіка функції дуже важливо знати, на яких проміжках він опуклий, а на яких вгнутий.

***Означення:*** *Графік функції* $y = f(x)$ *називається* ***опуклим*** *на деякому проміжку, якщо всі точки* (на рис. 11.1 точки $A_1, A_2$) *цього графіка лежать нижче будь-якої дотичної на цьому проміжку.*

***Означення:*** *Графік функції* $y = f(x)$ *називається* ***вгнутим*** *на деякому проміжку, якщо всі точки* (на рис. 11.1 точки $A_3, A_4$) *цього графіка лежать вище будь-якої дотичної на цьому проміжку.*

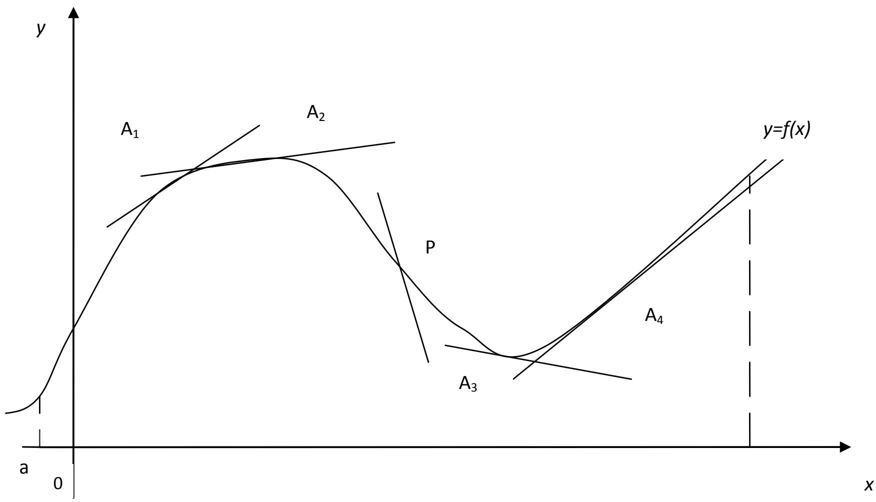



Рис. 11.1

***Означення:*** *Точка, яка віддаляє опуклу частину від вгнутої або навпаки* (на рис. 11.1 точка $P$), *називається точкою перегину.*

Сформулюємо необхідні та достатні умови опуклості чи вгнутості функції.

***Достатня умова опуклості або вгнутості***

Якщо в усіх точках деякого проміжку $(a;b)$ похідна другого порядку функції $y = f(x)$ *від'ємна (додатна)*, то графік даної функції на цьому проміжку *опуклий (вгнутий)*. Тобто

якщо $f''(x) < 0$ – ***графік опуклий***; (11.4)

якщо $f''(x) > 0$ – ***графік вгнутий***. (11.5)

***Необхідна умова***

Якщо похідна другого порядку даної функції в деякій точці $x = x_0$ дорівнює нулю $f''(x_0) = 0$ або не існує та при переході через цю точку змінює знак, то точка $x = x_0$ ***є точкою перегину***.

***Для дослідження функції на опуклість та точки перегину потрібно:***

1. знайти область визначення функції;
2. знайти другу похідну $y'' = f''(x)$;
3. знайти точки, в яких друга похідна не існує або дорівнює 0: $f''(x) = 0$;
4. дослідити знак другої похідної зліва і справа від знайдених точок і зробити висновок про інтервали опуклості: якщо $f''(x) < 0$ – ***графік функції опуклий***; якщо $f''(x) > 0$ – ***графік функції вгнутий***;
5. якщо при переході через точку друга похідна $f''(x)$ змінює свій знак, то вона є точкою перегину;
6. знайти значення функції в точках перегину.

**Завдання 96.** Дослідіть функцію $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 8$ на опуклість та точки перегину.

*Розв'язання*

Аналізуючи запропоновану функцію, встановлюємо, що областю визначення її є множина всіх дійсних чисел:

$$D(y): x \in R .$$

Значення похідної другого порядку $y''$ для даної функції знайдемо, попередньо встановивши похідну першого порядку $y'$:

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 ;$$

$$y'' = 12x - 18 .$$

Розв'яжемо рівняння $f''(x) = 0$.

$$12x - 18 = 0 ;$$

$$6(2x - 3) = 0 ;$$

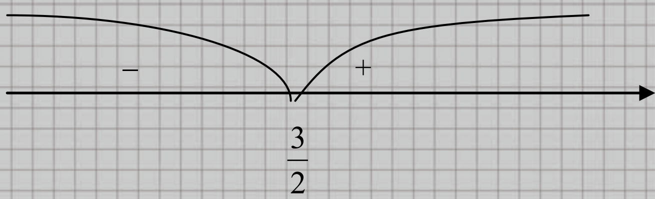
$6 \neq 0$, отже, $2x - 3 = 0$; $2x = 3$; $x = \frac{3}{2}$.

Розіб'ємо область визначення функції точкою $x_0 = \frac{3}{2}$ на проміжки та встановимо знак другої похідної на кожному. Для цього виберемо з кожного проміжку конкретне значення, яке підставимо у похідну другого порядку:

$x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$. Нехай $x = 1$, тоді $f''(1) = 12 \cdot 1 - 18 < 0$.

$x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Нехай $x = 2$, тоді $f''(1) = 12 \cdot 2 - 18 > 0$.

Тобто



Отже, при $x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$ функція опукла, а при $x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ – вгнута.

Оскільки при переході через точку $x_0 = \frac{3}{2}$ друга похідна змінює свій знак, то дана точка є точкою перегину графіка функції. Знайдемо значення функції в цій точці:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 12 \cdot \frac{3}{2} - 8 = \frac{27}{4} - \frac{24}{34} + 18 - 8 = -\frac{216}{4} + 10 = -3{,}5 \cdot$$

**Відповідь:** функція опукла при $x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$, вгнута – при $x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Точка перегину – $x_0 = \frac{3}{2}$; $f\left(\frac{3}{2}\right) = -3{,}5$.

## 5.Повне дослідження функцій за допомогою похідної та побудова її графіка

Нехай на відрізку $[a;b]$ задана функція $y = f(x)$. Розповсюдженим методом побудови графіка функції є побудова за точками: на площині будують декілька точок, координати яких задовольняють рівняння $y = f(x)$, а потім ці точки сполучають суцільною лінією. Графік буде тим точнішим, чим більше точок на площині зазначено. Побудований таким чином графік не відтворює реальну поведінку функції, адже з відрізка $[a;b]$ можна вибрати велику кількість значень змінної $x$ та нанести на площину стільки ж точок. На практиці це зробити дуже складно. Тому для дослідження функції на відрізку та побудови її графіка використовують похідну.

***Загальна схема дослідження функції $y = f(x)$ і побудова її графіка.***

1. Знаходимо область визначення функції *f (x)*.
2. Знаходимо інтервали неперервності та точки розриву.
3. Знаходимо точки перетину кривої з осями координат.
4. Досліджуємо функцію на парність або непарність (осьова або центральна симетрія графіка).
5. Досліджуємо функцію на періодичність.
6. Знаходимо асимптоти графіка функції (горизонтальні, вертикальні або похилі).
7. Знаходимо критичні точки першого роду, інтервали зростання і спадання функції.
8. Знаходимо точки екстремумів та екстремальні значення функції.
9. Знаходимо критичні точки другого роду, інтервали опуклості та вгнутості графіка функції.
10. Знаходимо точки перегину і значення функції в точках перегину.
11. Згідно з результатами дослідження будуємо у системі координат графік функції.

З перелічених етапів докладніше розглянемо знаходження асимптот графіка функції.

При вивченні поведінки функції, якщо $x \to +\infty(-\infty)$ або поблизу точок розриву другого роду, часто трапляється, що графік функції як завгодно близько наближається до тієї чи іншої прямої. Ці прямі називаються ***асимптотами***.

***Означення.*** *Пряма $x = a$ називається **вертикальною асимптотою** графіка функції $y = f(x)$, якщо хоча б одна з границь $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ або $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ нескінченна.*

Наприклад, пряма $x = 3$ – вертикальна асимптота графіка функції $y = \dfrac{1}{x-3}$, оскільки

$$\lim_{x \to 3+0} \frac{1}{x-3} = +\infty; \qquad \lim_{x \to 3-0} \frac{1}{x-3} = -\infty.$$

***Означення.*** *Пряма* $y = kx + b$ *називається* ***похилою асимптотою*** *графіка функції* $y = f(x)$ *при* $x \to +\infty(-\infty)$, *якщо*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - kx - b\right) = 0$$

$$\left(\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - kx - b\right] = 0\right). \qquad (11.6)$$

***Теорема.*** *Для того, щоб пряма* $y = kx + b$ *була похилою асимптотою графіка функції* $y = f(x)$ *при* $x \to +\infty(-\infty)$, *необхідно й достатньо, щоб існували границі:*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = k,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - kx\right) = b, \qquad (11.7)$$

*або*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = k,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - kx\right) = b. \qquad (11.8)$$

Приймемо дану теорему без доведення.

**Завдання 97**. Знайдіть асимптоти кривих: а) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$;

б) $y = x^2 e^{-x}$.

*Розв'язання*

**а)** Досліджувана функція має вертикальну асимптоту $x = -2$. Оскільки

$$\lim_{x\to-2+0}\frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} = \infty, \qquad \lim_{x\to-2-0}\frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} = -\infty,$$

то функція має розрив другого роду. Знаходимо похилу асимптоту $y = kx + b$ :

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x(x+2)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x+2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 3 - x(x+2)}{x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-4x + 3}{x+2} = -4.$$

Отже, $y = x - 4$ є похилою асимптотою кривої

$$y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x+2}.$$

**б)** Очевидно, що вертикальних асимптот крива $y = x^2 e^{-x}$ не має. Якщо $x \to \infty$, то $y \to 0$. Отже, вісь $Ox$ є горизонтальною асимптотою даної кривої. Дослідимо наявність похилої асимптоти:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

Отже, є тільки горизонтальна асимптота y=0.

**Відповідь:** а) похила асимптота $y = x - 4$ ; б) горизонтальна асимптота y=0.

Перейдемо до повного дослідження функції та побудови її графіка.

**Завдання 98.** Дослідіть функцію $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ та побудуйте її графік.

*Розв'язання*

Дослідження функції проведемо поетапно.

1) Задана функція є дробово-раціональною, тому визначена на всій числовій осі, крім точки $x=-1$, в якій знаменник перетворюється в нуль, тобто

$$D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty).$$

2) Функція є неперервною у своїй області визначення, крім точки $x=-1$, де вона має розрив другого роду.

3) Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат. При $x = 0$ одержимо $y = 0$, тобто $O$ (0;0). У цій точці графік перетинає дві координатні осі.

4) Оскільки

$$f(-x)=\frac{-x^3}{2(-x+1)^2},$$

то $f(-x)\neq f(x)\neq -f(x)$, тобто функція є ні парною, ні непарною, а її графік несиметричний ні відносно осей координат, ні відносно початку координат.

5) Задана функція неперіодична, оскільки

$$f(x+T)=\frac{(x+T)^3}{2(x+T+1)^2}\neq f(x). \tag{11.9}$$

6) Знайдемо асимптоти графіка функції. Однобічні границі функції в точці розриву будуть:

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=-\infty,\qquad \lim_{x\to-1+0}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=-\infty.$$

Отже, пряма $x=-1$ є вертикальна асимптота. Горизонтальної асимптоти графік не має, оскільки

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = \pm\infty.$$

Похилі асимптоти мають рівняння $y = kx + b$, де

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx].$$

У нашому випадку:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{2(x+1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{2x^2+4x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{4x+4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2 - x}{2(x+1)^2} = -1.$$

Тобто пряма $y = \frac{1}{2}x - 1$ є асимптотою кривої.

7) Знайдемо інтервали зростання, спадання та екстремуми функції (детально описано в пункті 2 цієї ж теми). Похідна функції буде:

$$y' = \frac{3x^2 \cdot 2(x+1)^2 - 4(x+1)\cdot x^3}{4(x+1)^4} = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}.$$

Прирівнявши похідну до нуля, визначимо, що вона не існує в точці $x=-1$, а дорівнює нулю, коли $x^2(x+3)=0$, тобто при $x=-3$ і $x=0$.

Отже, критичними точками першого роду будуть лише точки $x=-3$ і $x=0$, бо $x=-1$ не належить області визначення функції.

8) Розіб’ємо область визначення функції критичними точками на проміжки та знайдемо знак похідної на кожному з них. Узагальнимо результати дослідження в таблиці 11.5.

Таблиця 11.5

**Результати дослідження функції** $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$

**на екстремум, зростання та спадання**

| $x$ | $(-\infty;-3)$ | $x=-3$ | $(-3;-1)$ | $x=-1$ | $(-1;0)$ | $x=0$ | $(0;+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – | не існує | + | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | max | ↘ | не існує | ↗ | Екст-ремуму немає | ↗ |

Отже, на інтервалах $(-\infty;-3)$, $(-1;0)$ і $(0;+\infty)$ функція зростає, а на інтервалі $(-3;-1)$ – спадає.

Екстремальним значенням функції буде:

$$y_{\max} = f(-3) = -\frac{27}{8}.$$

9) Знайдемо інтервали опуклості та вгнутості графіка, точки перегину. Для цього знайдемо другу похідну функції:

$$y'' = \left(\frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}\right)' = \left(\frac{x^3+3x^2}{2(x+1)^3}\right)' =$$

$$= \frac{(3x^2+6x)\cdot 2(x+1)^3 - 6(x+1)^2(x^3+3x^2)}{4(x+1)^6} =$$

$$= \frac{2(x+1)^2\big((x+2)(x+1-(x^2+3x)\big)}{4(x+1)^6} = \frac{3x}{(x+1)^4}.$$

Усі можливі точки перегину знайдемо з рівняння:

$$\frac{3x}{(x+1)^4} = 0;$$

$$\begin{cases} 3x = 0 \\ (x+1)^4 \neq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x \neq -1 \end{cases}.$$

Отже, точка $x = 0$ є критичною точкою другого роду. Складемо таблицю (таблиця 11.6) з урахуванням критичної точки та точки розриву $x = -1$.

Таблиця 11.6

**Результати дослідження функції** $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$

**на вгнутість та опуклість**

| $x$ | $(-\infty;-1)$ | $x = -1$ | $(-1;0)$ | $x = 0$ | $(0;+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | – | не існує | – | 0 | + |
| $f(x)$ | $\cap$ | не існує | $\cap$ | Точка перегину | $\cup$ |

Отже, на інтервалах $(-\infty;-1)$ і $(-1;0)$ графік функції опуклий, а на інтервалі $(0; +\infty)$ – угнутий.

10) Оскільки при переході через точку $x = 0$ друга похідна змінює знак, то ця точка є точкою перегину графіка функції. Значення функції в точці перегину буде $y_{пер} = f(0) = 0$.

11) За одержаними результатами будуємо графік заданої функції.

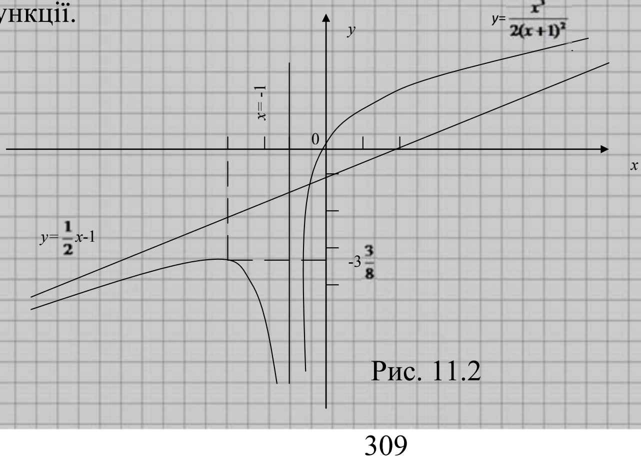



Рис. 11.2

## 6. Теореми про середнє значення (теореми Ролля, Лагранжа, Коші)

Дослідження функцій з допомогою похідних ґрунтуються на деяких основних теоремах диференціального числення.

**Теорема Ролля.** *Нехай функція f(x) неперервна на відрізку [a,b], диференційовна на інтервалі (a,b) і* $f(a)=f(b)$. *Тоді існує принаймні одна точка c є (a, b) така, що f'(c)* = 0 .

Доведення. За теоремою про найбільше та найменше значення функції неперервна на $[a;b]$ функція *f(x)* набуває на ньому найбільшого значення *M* і найменшого значення *m*.

Якщо *m=M,* то *f(x)* – стала для всіх $x \in (a,b)$ і за точку *c,* що також належить *(a,b)*, можна взяти будь-яку точку з даного інтервалу.

Якщо *m<M,* то принаймні одне із значень *m* або *M* досягається у внутрішній точці *c* відрізка $[a;b]$, тобто в точці, яка належить інтервалу *(a,b).* Нехай, наприклад, у точці *c* функція *f(x)* набуває найменшого значення. Доведемо, що *f'(c)* = 0 . Дійсно, для досить малих $\Delta x \neq 0$ точка $c+\Delta x \in (a;b)$, причому

$$\Delta f(c) = f(c+\Delta x) - f(c) \geq 0 .$$

Тому при $\Delta x > 0$

$$\frac{\Delta f(c)}{\Delta x} \geq 0 \text{ і } f'_+(c) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(c)}{\Delta x} \geq 0 ,$$

а при $\Delta x < 0$

$$\frac{\Delta f(c)}{\Delta x} \leq 0 \text{ і } f'_-(c) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(c)}{\Delta x} \leq 0 .$$

Оскільки функція $f(x)$ диференційовна в точці *c,* то

$$f'(c)=f'_+(c)=f'_+(c)=0.$$

Теорему доведено.

***Геометрично теорема Ролля означає***, що серед усіх дотичних до графіка функції *y=f(x)* знайдеться принаймні одна, паралельна осі *Ox*.

У точці *c* функція *f(x)* набуває найменшого значення (рис. 11.3).

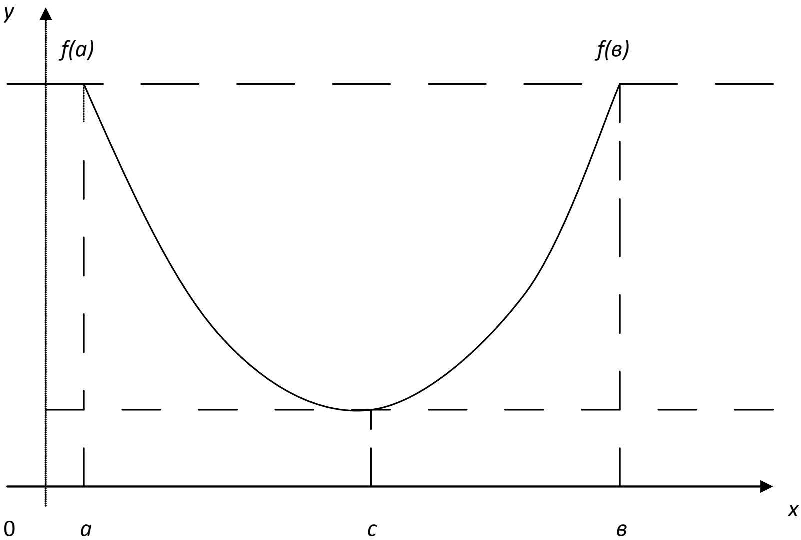



Рис. 11.3

**Теорема Лагранжа.** *Нехай функція f(x) неперервна на відрізку* $[a;b]$ *і диференційовна на інтервалі* $(a;b)$. *Тоді існує принаймні одна точка* $c \in (a;b)$ *така, що*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\,. \qquad (11.10)$$

Доведення. Розглянемо на $[a;b]$ допоміжну функцію

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\,.$$

Очевидно, $F(x)$ задовольняє всі вимоги теореми Ролля. Вона неперервна на $[a;b]$ як різниця двох неперервних на *[a, b]* функцій $f(x)$ і $f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$; диференційовна на $(a;b)$, причому $F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ і $F(a)=F(b)=0$.

Отже, за теоремою Ролля, існує принаймні одна точка $c\in(a;b)$ така, що $F'(c)=0$, тобто

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0.$$

Звідси $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$, що й потрібно було довести.

Теорему доведено.

***Геометрично теорема Лагранжа означає***, що серед усіх дотичних до графіка функцій *y=f(x)* знайдеться принаймні одна, паралельна січній $AB$, яка сполучає точки $A(a;f(a))$ і $B(b;f(b))$. Справді (рис. 11.3), відношення $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ є кутовим коефіцієнтом січної $AB$, а $f'(c)$ – кутовим коефіцієнтом дотичної до графіка, проведеної в точці $(c;f(c))$. Ці коефіцієнти рівні, отже, дотична та січна $AB$ дійсно паралельні.

*Зауваження.* Теорема Ролля є окремим випадком теореми Лагранжа, якщо *f(a)=f(b)*.

**Теорема Коші.** *Нехай функції f{x) і g(x) неперервні на відрізку* $[a;b]$ *і диференційовні на інтервалі* $(a;b)$, *причому* $g'(x)\neq 0$ *в усіх точках* $x\in(a;b)$. *Тоді існує принаймні одна точка* $c\in(a;b)$ *така, що*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{11.11}$$

Доведення. Спочатку зауважимо, що $g(b)-g(a)\neq 0$, оскільки у протилежному випадку $\left(g(b)=g(a)\right)$. За теоремою Ролля, для функції $g(x)$ знайдеться принаймні одна точка $\tilde{n}\in(a;b)$ така, що $g'(c)=0$. А це суперечить тому, що $g'(c)\neq 0$ в усіх точках $(a;b)$. Далі розглянемо на $[a;b]$ допоміжну функцію:

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left(g(x)-g(a)\right).$$

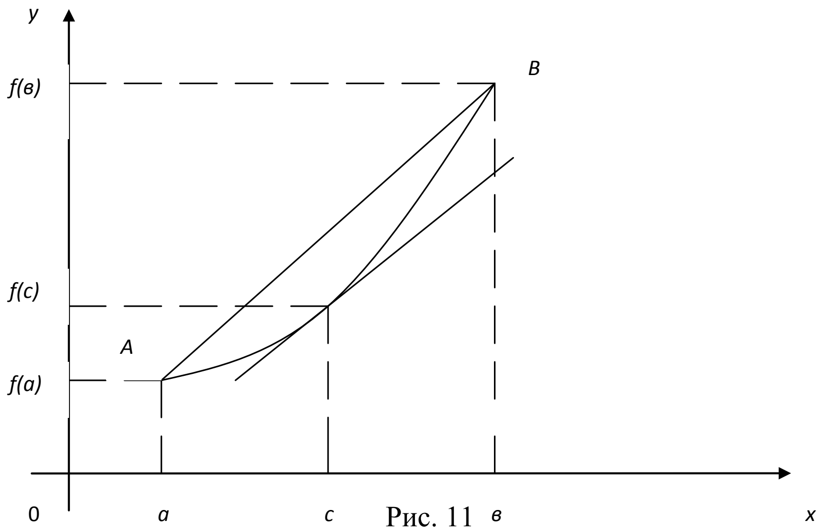



Рис. 11

Очевидно, $F(x)$ задовольняє всі вимоги теореми Ролля. Вона неперервна на $[a;b]$ як різниця двох неперервних на $[a;b]$ функцій $f(x)$ і $f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left(g(x)-g(a)\right)$; диференційовна на $(a;b)$, причому

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$$

і $F(a) = F(b) = 0$.

Отже, за теоремою Ролля, існує принаймні одна точка $c \in (a;b)$ така, що $F'(c) = 0$, тобто

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0.$$

Звідси, оскільки $g'(c) \neq 0$, дістанемо формулу Коші:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \qquad c \in (a,b),$$

що й потрібно довести.

Теорему доведено.

*Зауваження*. Теорема Лагранжа є окремим випадком теореми Коші, якщо $g(x) = x$.

## 7. Правило Лопіталя для розкриття невизначеності

***Правило Лопіталя***: якщо границею відношення двох функцій $f(x)$ і $g(x)$ є невизначеність типу $\frac{0}{0}$ чи $\frac{\infty}{\infty}$ та існують похідні першого порядку від даних функцій (тобто $f'(x)$, $g'(x)$), то

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \qquad (11.12)$$

***Зауваження.*** Правило Лопіталя можна використовувати декілька разів у одному й тому самому прикладі.

**Завдання 99.** Знайдіть границі функцій:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\lim_{x\to 0}\cos x=1;$$

$$2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-3x+2)'}{(x^2-4)'}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-3}{2x}=\frac{1}{4};$$

$$3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(e^x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\leftarrow\infty}\frac{e^x}{2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(e^x)'}{2(x)'}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}e^x=\infty.$$

## 8. Оптимізація в економічних задачах

В економіці дуже часто потрібно знайти найкраще або оптимальне значення того чи іншого показника: найвищу продуктивність праці, максимальний прибуток, мінімальні витрати тощо. Кожен показник являє собою функцію однієї чи багатьох змінних. Подібні задачі породжують клас екстремальних задач в економіці, розв'язання яких пов'язане з використанням методів диференціального числення.

Якщо виробник знає (зокрема завдяки маркетинговим дослідженням) функцію попиту на свою продукцію, то він може контролювати кількість її виготовлення та ціну для реалізації. Встановлення достатньо великої ціни може привести до того, що споживачі купуватимуть у нього продукцію дещо в меншому обсязі. Якщо ж він вироблятиме більше, то ціну доведеться знизити, аби реалізувати всю продукцію за певний період часу. При цьому прибуток збільшиться за рахунок зростання обсягу продажів (доходу) і одночасно зменшиться через зменшення ціни (витрати). Результат залежатиме від того, що буде більше: дохід чи витрати.

Щоб визначити оптимальний випуск продукції (той, при якому прибуток буде максимальним), виробник повинен знати залежність прибутку (позначимо його $C$) від обсягу продукції ($x$), та виконати за допомогою диференціального числення дослідження функції $C(x)$ на максимум.

**Завдання 100.** Виробник реалізує свою продукцію за ціною $p$ грн. за одиницю, а витрати при цьому задаються залежністю $S(x) = ax + \lambda x^3$, $(a < p, \lambda > 0)$. Знайдіть оптимальний для виробництва обсяг продукції та прибуток, який йому відповідає.

*Розв'язання*

Нехай обсяг виготовленої продукції – $x$. Тоді дохід від її реалізації (позначимо $P(x)$) будемо розглядати як добуток кількості виготовленої продукції на ціну за одиницю, тобто

$$P(x) = px.$$

Прибуток виробника залежить не лише від того, скільки продукції буде виготовлено та за якою ціною реалізовано, а й від того, які витрати на все це він понесе. Тому функцію прибутку $C(x)$ обчислимо як різницю між доходом реалізації $P(x)$ та витратами виробника, які дані в умові завдання:

$$C(x) = P(x) - S(x) = px - (ax + \lambda x^3).$$

Знайти оптимальний обсяг випуску продукції означає знайти те значення точки *x*, яке є максимальним.

Щоб знайти оптимальний прибуток, дослідимо функцію $C(x)$ на максимум, використовуючи другу похідну (теоретичні основи такого дослідження викладені нами раніше – питання 2 даної теми).

Похідну першого порядку функції прибутку

$$C'(x) = \left(px - ax - \lambda x^3\right)' = p - a - 3\lambda x^2$$

прирівняємо до нуля, щоб знайти значення критичних точок.

$$p - a - 3\lambda x^2 = 0,$$

$$-3\lambda x^2 = a - p,$$

$$x^2 = \frac{a - p}{-3\lambda},$$

$$x^2 = \frac{p-a}{3\lambda},$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}.$$

Оскільки за введеним позначенням $x$ – це обсяг виробленої продукції, то від'ємний корінь рівняння не задовольняє умову задачі.

Знайдемо значення похідної другого порядку в знайденій критичній точці:

$$C''(x) = -6\lambda x,$$

$$C''\left(\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}\right) = -6\lambda\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}} < 0 \cdot$$

Це означає, що в точці $x = \sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}$ функція *C(x)* має максимум.

Обчислимо максимальне значення функції в точці $x$:

$$C(x) = C\left(\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}\right) = px - \left(ax + \lambda x^3\right) = p\cdot\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}} - a\cdot\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}} - \lambda\left(\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}\right)^3 =$$

$$= \sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}\left(p - a - \lambda\cdot\frac{p-a}{3\lambda}\right) = \sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}\cdot\frac{3(p-a) - p + a}{3} = \frac{2}{3}(p-a)\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}.$$

**Відповідь:** оптимальний обсяг виготовленої продукції $x = \sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}$, прибуток при цьому описуватиметься функцією $C(x) = \frac{2}{3}(p-a)\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}$.

**У результаті вивчення теми необхідно:**

| *знати* | *вміти* |
|---|---|
| - теореми про середнє значення;<br>- правило Лопіталя для розкриття невизначеності;<br>- необхідні та достатні умови зростання, спадання та екстремумів функцій;<br>- рівняння асимптот до графіка функцій;<br>- загальну схему дослідження функції. | - проводити дослідження функцій за їх аналітичним заданням з використанням теорії диференціального числення;<br>- досліджувати функції на екстремум, на опуклість (вгнутість) графіка, знаходити точки перегину кривої;<br>- будувати графіки функцій, спираючись на повне дослідження;<br>- використовувати поняття диференціального числення для вирішення задач економічного змісту. |

**Питання для самоконтролю**

1. Сформулюйте означення зростаючої (спадної) функції.
2. За якої умови дана функція буде зростаючою (спадною)?
3. Які інтервали називають інтервалами монотонності?
4. Які точки називаються критичними?
5. Сформулюйте необхідні та достатні умови існування екстремуму.
6. Що необхідно зробити для того, щоб дослідити функції на екстремум, використовуючи похідну першого порядку?
7. Сформулюйте другу ознаку дослідження функції на екстремум.
8. Які числа називаються найбільшим і найменшим значенням функції на відрізку?

9. В чому полягає суть дослідження функції на найбільше та найменше значення на відрізку?
10. Сформулюйте значення опуклого та вгнутого графіка функції.
11. Яка точка називається точкою перегину графіка функції?
12. Сформулюйте необхідні та достатні умови опуклості чи вгнутості функції.
13. За якою схемою проводиться дослідження функції на опуклість та вгнутість?
14. Яка пряма називається асимптотою графіка функції? Які види асимптот ви знаєте?
15. Сформулюйте означення вертикальної асимптоти.
16. Які умови повинні виконуватись для того, щоб пряма $y = kx + b$ була похилою асимптотою?
17. Які етапи входять до схеми повного дослідження графіка функції?
18. Які основні теореми про середні ви знаєте? Сформулюйте їх.
19. Сформулюйте правило Лопіталя для розкриття невизначеності.
20. В чому полягає суть методу оптимізації в економічних задачах?

# ТЕМА 12. ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

***План***

1. *Основні поняття функції багатьох змінних, границя та неперервність. Способи задання функцій багатьох змінних. Лінії рівня.*
2. *Частинні похідні першого порядку. Диференціювання функції багатьох змінних першого порядку.*
3. *Частинні похідні вищих порядків. Диференціал ІІ-го порядку.*
4. *Повний диференціал. Градієнт.*
5. *Економічний зміст частинних похідних.*

*Основні твердження та поняття:* функція двох змінних, аргумент, область визначення, область значень, границя, неперервність, графік функції, лінія рівня (ізокрива) функції, частинні похідні першого, другого та вищих порядків, мішані похідні, неявно задана функція, повний диференціал, градієнт.

## 1. Основні поняття функції багатьох змінних, границя та неперервність.

Розглянемо деяку множину $D$ впорядкованих пар чисел $(x, y)$. Якщо кожній парі чисел $(x, y) \in D$ за певним законом відповідає число $z$, то кажуть, що на множині $D$ визначено функцію $z$ від двох змінних $x$ і $y$ та записують $z = f(x, y)$.

Прикладом такої функції може бути площа прямокутника із сторонами $a$ та $b$, що знаходиться за формулою $S = ab$. Тут кожній парі значень $a$ і $b$ відповідає єдине значення площі $S$, тоді функцію двох змінних можна записати формулою $S = f(a, b)$.

Змінна $z$ називається залежною змінною (функцією), а змінні $x$ та $y$ – незалежними змінними (аргументами).

За аналогією з функцією однієї змінної $y = f(x)$ та функцією двох змінних $z = f(x, y)$ можна розглядати функцію, яка буде залежати від кількох незалежних змінних $(x_1, x_2 ... x_n)$. У загальному випадку це можна записати у вигляді:

$$y = f(x_1, x_2 \ldots x_n).$$

Тоді незалежні змінні $x_1, x_2 \ldots x_n$ називають **аргументами**, а залежну змінну $y$ – **функцією**.

***Означення***. *Закон, за яким у відповідність значенням аргументів $x_1, x_2 \ldots x_n$ ставиться деяке значення $y$, називається* ***функцією***.

***Означення.*** *Сукупність значень $x_1 \ldots x_n$, для яких вираз $f(x_1 \ldots x_n)$ має зміст, називається* ***областю визначення функції*** *і позначається $D(f)$ або $D$, а значення, які при цьому приймає залежна змінна, утворюють* ***область значень функції*** *($E(f)$ або $E$).*

Лінію, що обмежує область визначення, називають її *межею*. Точки області, які не лежать на її межі, називаються внутрішніми. Область, яка містить одні внутрішні точки, називається *відкритою*. Якщо ж до області визначення належать і всі точки межі, то така область називається *замкненою*.

Для функції багатьох змінних справедливі багато понять і тверджень, як і для функції однієї змінної. Зокрема способи задання функції двох змінних.

Найчастіше використовують аналітичний спосіб, коли функція задається формулою. Наприклад, $z = x^2 + y^2$; $z = \dfrac{1}{\sqrt{y - x}}$. Областю визначення такої функції вважається множина всіх тих точок площини, для яких задана формула має зміст.

У випадку графічного задання функції двох змінних $z = f(x, y)$ відповідає деяка поверхня. Побудова графіків функції двох змінних часто пов'язана із значними труднощами. Тому для зображення користуються методом перерізів, який полягає в тому, що поверхню $z = f(x, y)$ перетинають фіксованими площинами $x = x_0$ та $y = y_0$ і за графіками кривих $z = f(x_0, y)$ та $z = f(x, y_0)$ визначають графік функції $z = f(x, y)$.

Можна фіксувати не лише аргументи $x$ чи $y$, а й саму функцію $z$. В цьому випадку відбувається перетин даної поверхні площинами $z = c$, де $c$ – довільне число, взяте з множини (області) значень $E$ даної функції. Крива $f(x, y) = c$, що при цьому отримується, називається ***лінією рівня*** (або ***ізокривою***) функції двох змінних. Цей термін запозичений з картографії, де лінією рівня називають ті лінії, на яких висота точок земної поверхні над рівнем моря стала.

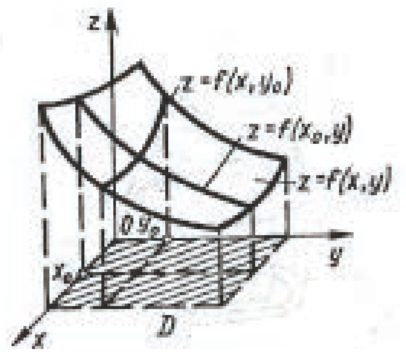



Рис. 12.1

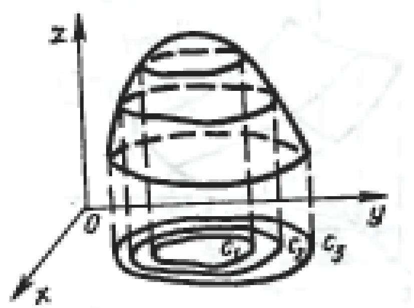



Рис. 12.2

Лінії рівня часто зустрічаються на практиці. Сполучивши на карті поверхні Землі точки з однаковою середньодобовою температурою або середньодобовим тиском, дістанемо відповідно *ізотерми* та *ізобари*, які є важливими даними для прогнозу погоди.

Аналогічно до означення границі функції однієї змінної пропонується і означення границі функції двох змінних. Спочатку введемо поняття $\delta$ – околу заданої точки $M_0(x_0; y_0)$.

***Означення.*** *Множина всіх точок $M(x;y)$, координати яких задовольняють нерівність*

$$\rho(M;M_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta, \qquad (12.1)$$

*де $\rho(M;M_0)$ – відстань від точки $M$ до $M_0$, називається **$\delta$-околом точки** $M_0(x_0;y_0)$.*

Іншими словами, $\delta$-окіл деякої точки $M_0(x_0;y_0)$ – це всі внутрішні точки круга з центром $M_0$ і радіусом $\delta$.

***Означення (за Коші або "мовою $\varepsilon-\delta$").*** *Число $A$ **називається границею функції** $z=f(x;y)$ **в точці** $M_0(x_0;y_0)$, якщо для будь-якого як завгодно малого $\varepsilon>0$ знайдеться таке число $\delta>0$, що для всіх точок $M(x;y)$ з області визначення $D$ функції, які задовольняють умову $0<\rho(M;M_0)<\delta$, виконується нерівність $|f(x;y)-A|<\varepsilon$.*

Використовують позначення:

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=A \text{ або } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=A. \qquad (12.2)$$

Поняття неперервності функції багатьох змінних визначається так само, як і для функції однієї змінної.

Розглянемо функцію двох змінних: $z=f(x,y)$. Візьмемо у ній деяку фіксовану точку з координатами $(x_0,y_0)$ і надамо їй приросту $\Delta x,\Delta y$. Тоді приріст функції дорівнює:

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0).$$

***Означення.*** *Якщо*

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0, \tag{12.3}$$

*то будемо говорити, що функція* $f(x,y)$ *є неперервною в точці* $(x_0, y_0)$.

Дана формула означає, що нескінченно малим приростам аргументів відповідає нескінченно малий приріст функції. Якщо ввести позначення

$$x_0 + \Delta x = x, y_0 + \Delta y = y,$$

то формулу (12.3) можна переписати так:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0). \tag{12.4}$$

Тобто неперервність функції в даній точці означає, що її границя рівна значенню функції в цій точці.

Якщо функція $f(x,y)$ є неперервною в кожній точці області визначення, то вона є неперервною у всій області.

Для функції багатьох змінних, коли число аргументів не менше трьох, неперервність функції вводиться за допомогою формул, аналогічних (12.3) і (12.4).

Функції двох і більшого числа змінних часто використовуються в економічних дослідженнях: для прогнозування, вивчення попиту та пропозиції, аналізу виробничої діяльності тощо.

Важливим елементом мікро- та макроекономічної теорії раціонального ведення господарства є, з одного боку, виробник, який витрачає економічні ресурси для виготовлення продукції та послуг, а з іншого – технологічні процеси, пов’язані з виробництвом.

Вивчаючи економічні процеси у сучасному великомасштабному виробництві, надзвичайно важливо зібрати необхідну інформацію для побудови моделі, що враховує внутрішні особливості виробництва.

Подібні міркування лежать в основі теорії виробничих функцій. Виникнення цієї теорії прийнято відносити до 1928 року, коли з'явилася стаття "Теорія виробництва" американських учених – економіста П. Дугласа і математика Д. Кобби. У ній була здійснена спроба визначити емпіричним способом вплив витраченого капіталу і праці на обсяг випущеної продукції переробною промисловістю США. Поставивши на основі статистичних даних ряд задач (визначити клас функцій, який найкраще описує співвідношення між трьома обраними характеристиками виробничої діяльності; знайти числові параметри, що задають конкретну функцію; порівняти одержані результати з фактичними даними) було запропоновано для їх розв'язання функцію виду:

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}. \tag{12.5}$$

Тут $Y$ – обсяг випущеної продукції. Це функція двох змінних $Y(K, L)$: $K$ – обсяг основного капіталу; $L$ – витрати праці. Значення $A, \alpha, \beta$ – числові параметри, що задовольняють умову $\alpha + \beta = 1$.

## 2. Частинні похідні першого порядку. Диференціювання функції багатьох змінних першого порядку

Для функції багатьох змінних можна ввести поняття похідної, розглядаючи функцію $z = f(x, y)$ як функцію від $x$, де $y$ – параметр, який фіксується (або функцію від $y$, де $x$ – параметр, який фіксується)

***Означення.*** *Величина*

| | |
|---|---|
| $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$ | $\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$ |

*називається*

| | |
|---|---|
| ***частинним приростом функції*** $f(x,y)$ ***по змінній*** $x$**.** | ***частинним приростом функції*** $f(x,y)$ ***по змінній*** $y$**.** |

Розглянемо відношення:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

***Означення.*** *Границю диференціального відношення* $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ *при* $\Delta x \to 0$ *будемо називати* ***частинною похідною функції*** $f(x,y)$ ***у точці*** $(x_0, y_0)$ ***по*** $x$ *і позначатимемо:*

$$z_x', f_x'(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0, y_0)}.$$

Аналогічно вводиться поняття частинної похідної функції двох змінних по $y$, яка позначається одним із символів:

$$z_y', f_y', \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Операція знаходження похідної $z_x$ називається **диференціюванням функції** $z$ **по аргументу** $x$, а точка $(x_0, y_0)$ називається **точкою диференціювання.** Частинна похідна

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

обчислюється як звичайна похідна по $x$, припускаючи, що змінна $y$ є сталою. Аналогічно обчислюється частинна похідна по $y$, але сталою є вже $x$. Тобто частинних похідних є стільки, скільки аргументів містить функція. Щоб підкреслити, що ми диференціюємо функцію перший раз, говорять: "знаходимо похідну першого порядку".

**Завдання 101.** Обчисліть у точці $(0,1)$ частинні похідні першого порядку функції $z = 3x^2y + x^2 + y^3 + 4$.

*Розв'язання*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy + 2x \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)} = 6\cdot 0\cdot 1 + 2\cdot 0 = 0 \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)} = 3\cdot 0^2 + 3\cdot 1^2 = 3$$

**Відповідь**: $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)} = 0$; $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)} = 3$.

**Теорема** ***(існування частинних похідних диференційовної функції)***. *Якщо функція* $z = f(x,y)$ *диференційована в точці* $M(x;y)$, *то вона має в цій точці похідні* $f_x' = f_x'(x,y)$ *та* $f_y' = f_y'(x,y)$ *і* $\Delta z = f_x' \cdot \Delta x + f_y' \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$.

Неважко перевірити, що коли функція має частинні похідні в точці, то вона буде неперервна в цій точці. Зворотне твердження не завжди вірне.

## 3. Частинні похідні вищих порядків. Диференціал II–го порядку

Частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ є функціями від тих же змінних, що й функція, тому можна обчислювати похідні від похідних першого порядку. Такі похідні називаються ***похідними другого порядку***.

Для функції двох змінних частинних похідних другого порядку буде чотири і вони обчислюватимуться за такими формулами:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

**Завдання 102.** Знайдіть частинні похідні другого порядку від функції $z = x^4 + 2xy + y^4 - 3x + 2$.

*Розв'язання*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 2y - 3; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x + 4y^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(4x^3 + 2y - 3\right) = 12x^2; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x + 4y^3\right) = 12y^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x + 4y^3\right) = 2; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(4x^3 + 2y - 3\right) = 2.$$

**Відповідь:** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2$.

***Означення:** Частинні похідні другого порядку по різних аргументах називаються **мішаними похідними**.*

У нашому прикладі дві мішані похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ є рівними. Це не випадковий результат, а наслідок твердження, яке ми приймемо без доведення.

**Лема1**: Якщо існують неперервні мішані похідні $f_{xy}'', f_{yx}''$, то вони рівні між собою.

Аналогічно до похідних другого порядку вводяться частинні похідні третього порядку як похідні від похідних другого порядку і так далі.

## 4. Повний диференціал. Градієнт

Якщо $dx$ і $dy$ розглядати як диференціали незалежних змінних, то $dz$ можемо записати у ***формі "повного диференціала":***

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy . \qquad (12.6)$$

Якщо це співвідношення виконується, то говорять, що функція диференційована в точці $(x, y)$.

Формула (12.6) показує, що для функції багатьох змінних поняття "функція диференційована" і "має частинні похідні першого порядку в цій точці", власне кажучи, не є тотожними. Функція може мати частинні похідні в точці, одна з яких не є неперервною. Тоді для такої функції в цій точці рівність (12.6) не виконується.

Отже, для диференційованості функції багатьох змінних необхідно, щоб усі частинні похідні першого порядку були неперервними.

Нехай у функції $z = f(x, y)$ $x, y -$ є функціями змінної $t$. Тоді $f(x, y)$ є складною функцією. Поставимо питання про існування похідної $z_t$, припустивши, що похідні по $x$ і по $y$ існують і неперервні. Зафіксуємо точку $t$ і надамо їй приросту $\Delta t$, тоді незалежні змінні $x, y$ одержать прирости $\Delta x, \Delta y$ і матиме місце формула:

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = f_x'(x, y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y'(x, y)\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon . \qquad (12.7)$$

Перейшовши до границі при $\Delta t \to 0$, одержимо, що

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \dot{x}_x, \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \dot{y}_y, \varepsilon \to 0 .$$

Звідки

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} . \qquad (12.8)$$

***Означення. Градієнтом*** *функції* $z = f(x_1, ..., x_n)$ *у точці M називається вектор, що має координати*

$$gradx = (\frac{\partial z}{\partial x_1}, ... \frac{\partial z}{\partial x_n}) . \qquad (12.9)$$

Тоді

$$|gradx| = \sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x_1})^2 + ... + (\frac{\partial z}{\partial x_n})^2} . \qquad (12.10)$$

Градієнт показує напрямок, уздовж якого значення функції зростає найбільше у даній точці.

**Завдання 103.** Обчисліть градієнт функції $z = 3x^2 - 3y^2 - 10$ в точці $A(1;1)$.

*Розв'язання*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -6y.$$

$$gradx\Big|_{(1;1)} = (6,-6); \qquad \left|gradx\right| = \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}.$$

**Відповідь:** $6\sqrt{2}$.

## 5. Економічний зміст частинних похідних.

Розглянемо виробничу функцію $z = f(x;y)$, що виражає витрати виробництва в залежності від кількості двох видів продукції $x$ та $y$, яка випускається. Нехай чинник $x$ змінився на величину $\Delta x$, тоді виробнича функція $z$ зміниться на величину

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y).$$

Склавши відношення приросту функції $\Delta_x z$ до приросту аргументу $\Delta x$, отримаємо вираз $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$, що виражає середній приріст виробничої функції на одиницю приросту чинника $x$, або середні витрати виробництва на одиницю продукції $x$. Здійснивши перехід до границі при $\Delta x \to 0$, отримаємо граничні витрати виробництва на одиницю продукції $x$, тобто

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Провівши аналогічні міркування з чинником $y$, отримаємо:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

**Еластичність виробничої функції $z = f(x; y)$ відносно чинників виробництва $x$ та $y$ встановлюється так:**

$E_x(z) = \dfrac{x}{z} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x}$ – приблизно вказує відсотковий приріст виробничої функції (зниження) відносно приросту чинника $x$ на 1% за умови, що чинник $y$ не змінюється;

$E_y(z) = \dfrac{y}{z} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y}$ – приблизно вказує відсотковий приріст виробничої функції відносно приросту чинника $y$ на 1% за умови, що чинник $x$ не змінюється.

**Завдання 104.** Для випуску деякого товару визначена виробнича функція $f(x; y) = 20x + 10y - 2y^2 + 4x^2 + 3xy$, де $x, y$ – чинники виробництва. Дослідіть:

1) закон зміни виробничої функції за кожним чинником;
2) еластичність функції за кожним чинником;
3) коефіцієнт еластичності за чинниками при $x = 1, y = 1$.

*Розв'язання*

1) Щоб визначити зміну виробничої функції за чинниками $x$ та $y$, треба знайти частинні похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial f}{\partial y}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 20 + 8x + 3y; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 10 - 4y + 3x.$$

2) Використаємо означення еластичності функції за даними чинниками:

$$E_x(z) = \frac{x}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}(20 + 8x + 3y);$$

$$E_y(z) = \frac{y}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z}(10 - 4y + 3x),$$

де $z = 20x + 10y - 2y^2 + 4x^2 + 3xy$.

3) Обчислимо коефіцієнти еластичності при $x = 1, y = 1$.

$$E_x(z)\Big|_{x=1} = \frac{x}{z}(20+8x+3y)\Big|_{x=1} = \frac{20+8+3}{35} \approx 0{,}89;$$

$$E_y(z)\Big|_{y=1} = \frac{y}{z}(10-4y+3x)\Big|_{y=1} = \frac{10-4+3}{35} \approx 0{,}26.$$

**Відповідь:** із зростанням чинника $x$ на 1% відбувається відносне зростання заданої виробничої функції приблизно на 0,89% (за умови стабільності чинника $y$), а при зростанні чинника $y$ на 1% виробнича функція зростає приблизно на 0,26% (за умови стабільності чинника $x$).

Отже, на виробничу функцію $z = f(x;y)$ найбільший вплив має чинник $x$.

***Зауваження.*** Від'ємне значення коефіцієнта еластичності показує зменшення виробничої функції при зростанні відповідного чинника.

*Наприклад*, якщо $z = f(x;y)$ – функція випуску продукції і $E_x(z) = -0{,}08$, то зростання чинника $x$ на 1% призводить до зниження випуску продукції на 0,08%.

**У результаті вивчення теми необхідно:**

| ***знати*** | ***вміти*** |
|---|---|
| - способи задання функцій багатьох змінних;<br>- поняття частинних похідних функцій багатьох змінних;<br>- поняття градієнта;<br>- повного приросту та повного диференціала. | - знаходити частинні похідні першого та вищих порядків функції багатьох змінних;<br>- розв'язувати завдання професійного спрямування. |

## Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення функції двох та багатьох змінних.
2. Як знаходять область визначення функції двох змінних?
3. Які існують способи задання функції багатьох змінних?
4. Що розуміється під поняттям "лінія рівня" функції багатьох змінних?
5. Які функції багатьох змінних використовуються в економіці?
6. Сформулюйте означення границі функції двох змінних.
7. Сформулюйте означення частинних похідних першого порядку функції двох (багатьох) змінних.
8. Як обчислюються частинні похідні вищих порядків функції двох змінних?
9. Який зв'язок між кількістю змін функції та кількістю частинних похідних?
10. Сформулюйте означення мішаних похідних. Яка умова виконується для мішаних похідних функції двох змінних?
11. Вкажіть, яку функцію двох змінних називають диференційованою в точці?
12. Якщо функція в деякій точці диференційована, то чи буде вона в ній і неперервна? А навпаки?
13. Запишіть формулу для обчислення повного диференціала функції двох змінних.
14. Сформулюйте означення градієнта функції двох змінних. Що він характеризує?
15. В чому полягає економічний зміст частинних похідних?

# ТЕМА 13. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ НА ЕКСТРЕМУМ, УМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ

*План*

1. *Максимум та мінімум функції багатьох змінних. Дослідження функції двох змінних на екстремум.*
2. *Найбільше та найменше значення функції двох змінних.*
3. *Умовний екстремум функції двох змінних.*
4. *Застосування диференціального числення функцій багатьох змінних до наближених обчислень.*
5. *Оптимізація в економічних задачах.*

*Основні твердження та поняття*: функція багатьох змінних; функція двох змінних; частинні похідні; максимум (мінімум) функції двох змінних; точки екстремуму; екстремуми функції; необхідні та достатні умови існування екстремуму; критичні точки (стаціонарні; підозрілі на екстремум); найбільше (найменше) значення функції; умова (зв'язок); умовний та безумовний екстремум; метод Лагранжа; функція Лагранжа; визначник; наближені обчислення; похибки наближення; дохід; витрати; прибуток; оптимальний прибуток; фактори виробництва.

## 1. Максимум та мінімум функції багатьох змінних. Дослідження функції двох змінних на екстремум

Вище зазначалося, що для функції багатьох змінних справедливо багато понять і тверджень, як і для функції однієї змінної. Це стосується і екстремальних точок та екстремумів функції. Проілюструємо дані поняття на прикладі функції двох змінних.

Розглянемо функцію двох змінних $z = f(x;y)$ і деяку точку $M(x_0;y_0)$.

***Означення. Максимумом функції*** $f(x;y)$ *називається така величина* $f(x_0;y_0)$ *цієї функції, яка більша за всі значення, що їх набуває дана функція в будь-яких точках, достатньо близьких до точки* $M(x_0;y_0)$.

Інакше кажучи, функція $z = f(x;y)$ має в точці $M(x_0;y_0)$ максимум, якщо виконується умова:

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) < f(x_0;y_0), \qquad (13.1)$$

для достатньо малих $\Delta x$ та $\Delta y$ за абсолютною величиною.

Аналогічно формулюють і означення мінімуму функції, тільки умова його існування набуває вигляду:

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) > f(x_0;y_0). \qquad (13.2)$$

***Означення.*** *Максимуми і мінімуми функції двох чи більше змінних називаються* ***екстремумами функції,*** *а точка* $M(x_0;y_0)$*, в якій функція має екстремум, називається* ***точкою екстремуму функції***.

Виділяють необхідні та достатні умови існування екстремуму.

***Необхідні умови існування екстремуму***. *Якщо функція* $z = f(x;y)$ *має екстремум у точці* $M(x_0;y_0)$*, то кожна її частинна похідна першого порядку дорівнює нулю або не існує в цій точці, тобто*

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = 0 \quad \text{і} \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = 0. \qquad (13.3)$$

***Означення.*** *Точки, в яких частинні похідні першого порядку функції двох чи більше змінних дорівнюють нулю або не існують, називаються* ***критичними (стаціонарними) точками*** *або* ***точками, підозрілими на екстремум***.

Необхідні умови існування екстремуму дозволяють лише знаходити критичні точки. За допомогою ж достатніх умов існування екстремуму можна перевірити кожну з критичних точок та дослідити, який саме екстремум – мінімум чи максимум.

***Достатні умови існування екстремуму.*** Нехай функція $z = f(x;y)$ в деякому околі стаціонарної точки $(x_0;y_0)$ має неперервні частинні похідні другого порядку, причому

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(x_0,y_0)} = A, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} = B, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(x_0,y_0)} = C. \qquad (13.4)$$

Запишемо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2. \qquad (13.5)$$

Тоді:

1) якщо $\Delta > 0$, то в точці $(x_0;y_0)$ функція $z = f(x;y)$ має екстремум, причому при $A < 0$ – максимум, а при $A > 0$ – мінімум;

2) якщо $\Delta < 0$, то в точці $(x_0;y_0)$ екстремуму немає;

3) якщо $\Delta = 0$ – так званий сумнівний випадок, тобто екстремум у точці може існувати, а може і не існувати. В цьому випадку потрібно використовувати іншу достатню ознаку.

Узагальнюючи вищесказане, бачимо, що для того, щоб дослідити функцію двох змінних $z = f(x;y)$ на екстремум, необхідно виконати ряд послідовних дій.

***Схема дослідження функції двох змінних на екстремум***

1. Знайдіть частинні похідні першого порядку.
2. Знайдіть критичні точки, тобто перевірте виконання необхідної умови існування екстремуму: $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
3. Обчисліть значення частинних похідних другого порядку в критичних точках.
4. Для кожної критичної точки обчисліть значення виразу $\Delta = AC - B^2$ та зробіть висновки на базі достатньої умови існування екстремуму**.**

**Завдання 105.** Дослідіть на екстремум функцію:

$$f(x;y)=2x+8y-x^2-2y^2.$$

*Розв'язання*

Оскільки дана функція залежить від двох змінних, то для дослідження її на екстремум скористаємось запропонованою схемою.

1) Знайдемо значення частинних похідних першого порядку функції $z=f(x;y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2-2x; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=8-4y.$$

2) Прирівняємо частинні похідні до нуля та знайдемо критичні (стаціонарні) точки. Матимемо систему:

$$\begin{cases}2-2x=0\\8-4y=0\end{cases}.$$

Розв'язавши її, отримаємо, що $x=1, y=2$. Отже, в точці (1;2) функція може мати екстремум.

3) Знайшовши частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-4; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=0,$$

отримуємо числові значення, а не вирази зі змінними. Тобто в даному конкретному випадку обчислювати значення частинних похідних у стаціонарній точці (1;2) не потрібно.

4) Вводимо позначення:

$$A=-2; \qquad B=0; \qquad C=-4.$$

5) Обчислимо значення виразу $\Delta=AC-B^2$ та зробимо відповідні висновки, враховуючи достатні умови існування екстремуму:

$$\Delta=AC-B^2=(-2)\cdot(-4)-0=8.$$

Оскільки $\Delta=AC-B^2>0$ та $A=-2<0$, то точка (1;2) – точка максимуму функції $z=f(x;y)=2x+8y-x^2-2y^2$.

Тоді екстремум функції знайдемо, підставивши в неї координати екстремальної точки:

$$z_{\max}=z(1;2)=2\cdot 1+8\cdot 2-1^2-2\cdot 2^2=2+16-1-8=9.$$

**Відповідь:** $z_{\max}=z(1;2)=9$.

## 2. Найбільше та найменше значення функції двох змінних

З поняттям екстремуму функції двох змінних тісно пов'язані й її найбільші та найменші значення.

Для того, щоб знайти найбільше або найменше значення неперервної функції $z = f(x; y)$ в обмеженій замкнутій області $D$, потрібно знайти всі максимуми або мінімуми функції, які досягаються в середині цієї області, а також найбільше або найменше значення функції на межі цієї області. Найбільше з усіх цих чисел і буде шуканим найбільшим значенням, а найменше – найменшим.

Розглянемо особливості дослідження на найбільше та найменше значення функції двох змінних у замкненій області на конкретному прикладі.

**Завдання 106.** Дослідіть функцію $z = x^2 + 2y^2 + 4$ на найбільше та найменше значення в крузі $x^2 + y^2 \le 4$.

*Розв'язання*

Спочатку знайдемо всі максимуми або мінімуми даної функції. Для цього знайдемо значення її частинних похідних першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y.$$

Знайдемо критичні точки, прирівнявши частинні похідні до нуля, та розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 4y = 0 \end{cases}.$$

Отже, критичною є лише одна точка з координатами $M(0;0)$. Значення функції в цій точці $z\big|_{(0;0)} = 4$.

***Зауваження.*** Досліджуючи найбільше і найменше значення функції в області, не потрібно встановлювати, який саме екстремум має критична точка (максимум чи мінімум), адже розглядаються всі максимуми і мінімуми зсередини замкненої області.

Тепер дослідимо поведінку функції на межі області, тобто на колі $x^2 + y^2 = 4$. Перепишемо дане рівняння у вигляді $y^2 = 4 - x^2$, а це можливо, якщо $x \in [-2;2]$. Підставивши дане значення у вираз $z = x^2 + 2y^2 + 4$, отримаємо нову функцію, що залежатиме лише від однієї змінної:

$$z = x^2 + 2y^2 + 4 = x^2 + 2\left(4 - x^2\right) + 4 = 12 - x^2 .$$

Дослідимо дану функцію на найбільше та найменше значення. Для цього знайдемо похідну першого порядку $z' = -2x$ та критичну точку, прирівнявши її до нуля. Тоді:

$$-2x = 0, \quad \text{тобто} \quad x = 0 .$$

Знайдемо значення функції в критичній точці та на кінцях відрізка.

$$z(0) = 12; \qquad z(-2) = 12 - (-2)^2 = 8;$$
$$z(2) = 12 - 2^2 = 8 .$$

При даному значенні аргументу $x = 0$ функція $y^2 = 4 - x^2 = 4$, а залежна змінна $y = \pm 2$. Тобто межі області належать точки $M_1(0;-2)$ та $M_2(0;2)$.

Порівнюючи дані значення та отримане раніше $z(M) = z\big|_{(0;0)} = 4$, бачимо, що:

$$z_{найб} = z(M_1) = z\left(M_2\right) = 12, \qquad \text{а} \qquad z_{найм} = z(M) = 4 .$$

**Відповідь:** $z_{найб} = z(M_1) = z\left(M_2\right) = 12$, $z_{найм} = z(M) = 4$.

## 3. Умовний екстремум функції двох змінних

Різноманітні економічні дослідження часто потребують розв'язання задачі про знаходження екстремумів функції багатьох змінних за наявністю додаткових умов зв'язку на її аргументи. Такі екстремуми називаються ***умовними***. Вони часто використовуються при дослідженні оптимізації багатьох економічних та соціальних проблем.

Нехай функція $z = f(x; y)$ задана на області визначення $D$, що, в свою чергу, містить деяку лінію $L$, рівняння якої залежить від двох змінних і в загальному вигляді записується $\varphi(x; y) = 0$.

Якщо необхідно знайти екстремум функції в області $D$, то його називають ***безумовним екстремумом***, а у випадку, коли визначають екстремум функції на лінії $L$, що належить області $D$, говорять про ***умовний екстремум***. Остання назва пов'язана з тим, що на змінні $x$ та $y$ накладено додаткову умову $\varphi(x; y) = 0$.

***Означення.*** *Функцію виду* $\varphi(x; y) = 0$*, яка задає лінію* $L$ *області визначення* $D$ функції $z = f(x; y)$*, називають* ***умовою*** *(або* ***зв'язком****).*

Дослідити функцію на умовний екстремум можна двома методами:

***1) метод зведення до задачі про безумовний екстремум*** – використовується у випадку, коли рівняння $\varphi(x; y) = 0$ розв'язне відносно однієї зі змінних. Тоді, підставивши його розв'язок у функцію двох змінних, отримаємо функцію однієї змінної, яку можна дослідити на екстремум за відомою схемою;

**2)** ***метод невизначених множників Лагранжа*** – знаходження умовного екстремуму функції зводиться до відшукання безумовного екстремуму так званої *функції Лагранжа* (функції трьох змінних), яку записують за допомогою сталого множника $\lambda$ у вигляді:

$$L(x, y, \lambda) = f(x; y) + \lambda \cdot \varphi(x; y) \tag{13.6}$$

та яка задовольняє систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x; y) = 0. \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0. \end{cases} \qquad (13.7)$$

***Схема дослідження функції двох змінних на умовний екстремум методом невизначених множників Лагранжа***

1. Запишіть функцію Лагранжа у вигляді (13.6).
2. Знайдіть критичні точки умовного екстремуму, розв'язавши систему (13.7), що виражає необхідні умови існування екстремуму.
3. Перевірте в кожній критичній точці достатні умови існування умовного екстремуму:

а) якщо в деякій точці $M_k(x_k; y_k; \lambda_k)$ визначник третього порядку

$$\Delta(M_k) = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(M_k) & \varphi'_y(M_k) \\ \varphi'_x(M_k) & L''_{xx}(M_k) & L''_{xy}(M_k) \\ \varphi'_y(M_k) & L''_{xy}(M_k) & L''_{yy}(M_k) \end{vmatrix} \qquad (13.8)$$

додатній ( $\Delta(M_k) > 0$ ), то точка $M_k$ – ***точка максимуму***, а ***максимум функції*** буде дорівнювати значенню функції двох змінних у даній точці, тобто:

$$z_{\max} = f(M_k) = f(x_k; y_k); \qquad (13.9)$$

б) якщо $\Delta(M_k) < 0$, тоді точка $M_k$ – ***точка мінімуму***, а ***мінімум функції*** :

$$z_{\min} = f(M_k) = f(x_k; y_k). \qquad (13.10)$$

Розглянемо застосування даного методу на конкретному завданні.

**Завдання 107.** Дослідіть функцію $z = xy$ на екстремум за умови, що $x^2 + y^2 = 2$.

*Розв'язання*

Проведемо дослідження методом невизначених множників Лагранжа. Функція, що є умовою (зв'язком), повинна дорівнювати нулю (за означенням), тому перепишемо її у вигляді:

$$x^2 + y^2 - 2 = 0.$$

Проаналізувавши завдання, бачимо, що

$$f(x;y) = z = xy, \qquad \varphi(x;y) = x^2 + y^2 - 2.$$

Запишемо функцію Лагранжа, використовуючи рівність (13.6):

$$L(x,y,\lambda) = xy + \lambda \cdot \left(x^2 + y^2 - 2\right) = xy + \lambda x^2 + \lambda y^2 - 2\lambda.$$

Знайдемо критичні точки. Для цього спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку від функції $L$:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + 2\lambda x; \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = x + 2\lambda y;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 2.$$

та складемо систему виду (13.7):

$$\begin{cases} y + 2\lambda x = 0, \\ x + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 2 = 0. \end{cases}$$

Виразимо з першого рівняння множник $\lambda$ та підставимо його значення в друге рівняння системи:

$$\begin{cases} \lambda = -\dfrac{y}{2x}, \\ x + 2y \cdot \left(\dfrac{-y}{2x}\right) = 0, \\ x^2 + y^2 - 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{y}{2x}, \\ x = \dfrac{y^2}{x}, \\ x^2 + y^2 - 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{y}{2x}, \\ x^2 - y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 - 2 = 0. \end{cases}$$

З двох останніх рівнянь системи методом почленного додавання знайдемо значення змінних $x$ (до другого рівняння додамо третє) та $y$ (від другого віднімемо третє рівняння):

$$2x^2 - 2 = 0, \qquad \text{та} \qquad -2y^2 + 2 = 0,$$

$$2x^2 = 2, \qquad\qquad -2y^2 = -2,$$

$$x^2 = 1, \qquad\qquad y^2 = 1,$$

$$x = \pm 1, \qquad\qquad y = \pm 1.$$

Отже, є чотири критичні точки: $M_1(-1;-1)$, $M_2(-1;1)$, $M_3(1;-1)$, $M_4(1;1)$.

Для того, щоб перевірити достатні умови існування екстремуму, складемо визначник (13.8) в довільній точці $M(x;y)$, попередньо знайшовши значення його елементів – частинних похідних першого порядку функції $\varphi(x;y)$ та частинних похідних другого порядку функції Лагранжа $L$.

Оскільки $\varphi(x;y) = x^2 + y^2 - 2$, то:

$$\varphi'_x(M) = 2x; \qquad \varphi'_y(M) = 2y.$$

Враховуючи раніше знайдені частинні похідні $\dfrac{\partial L}{\partial x} = y + 2\lambda x$, $\dfrac{\partial L}{\partial y} = x + 2\lambda y$ та значення невизначеного множника $\lambda = -\dfrac{y}{2x}$, матимемо:

$$L''_{xx} = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(y + 2\lambda x) = 2\lambda = 2\cdot\left(\frac{-y}{2x}\right) = -\frac{y}{x};$$

$$L''_{yy} = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(x + 2\lambda y) = 2\lambda = 2\cdot\left(\frac{-y}{2x}\right) = -\frac{y}{x};$$

$$L''_{xy} = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x + 2\lambda y) = 1.$$

Отже, згідно з (13.8) визначник $\Delta(M)$ набуде вигляду:

$$\Delta(M)=\begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & -\frac{y}{x} & 1 \\ 2y & 1 & -\frac{y}{x} \end{vmatrix}=0+4xy+4xy-\left(-\frac{4y^3}{x}-\frac{4x^2y}{x}+0\right)=$$

$$=8xy+4\frac{y^3}{x}+4xy=12xy+4\frac{y^3}{x}.$$

Перевіримо значення даного визначника в кожній критичній точці та, використовуючи достатні умови (13.9)–(13.10), знайдемо умовні екстремуми функції.

1) Оскільки в точці $M_1(-1;-1)$ визначник додатний

$$\Delta(M_1)=12\cdot(-1)\cdot(-1)+4\cdot\frac{(-1)^3}{-1}=12+4=16>0,$$

то в ній існує умовний екстремум (максимум). Тоді максимум функції, що досягається в даній точці, набуде значення:

$$z_{\max}=z(M_1)=(-1)\cdot(-1)=1.$$

Аналогічно перевіряємо й інші три критичні точки.

2) $M_2(-1;1)$ – точка мінімуму функції тому, що

$$\Delta(M_2)=12\cdot(-1)\cdot 1+4\cdot\frac{1^3}{-1}=-12-4=-16<0.$$

Тоді мінімум функції:

$$z_{\min}=z(M_2)=(-1)\cdot 1=-1.$$

3) В точці $M_3(1;-1)$ досягається мінімум функції, оскільки

$$\Delta(M_3) = 12 \cdot 1 \cdot (-1) + 4 \cdot \frac{(-1)^3}{1} = -12 - 4 = -16 < 0$$

та $\quad z_{\min} = z(M_3) = 1 \cdot (-1) = -1.$

4) Для $M_4(1;1)$:

$$\Delta(M_4) = 12 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1^3}{1} = 12 + 4 = 16 > 0$$

та $\quad z_{\max} = z(M_4) = 1 \cdot 1 = 1.$

**Відповідь:** за умови $x^2 + y^2 = 2$ для функції $z = xy$ існує екстремум, причому

$$z_{\max} = z(M_1) = z(M_4) = 1,$$
$$z_{\min} = z(M_2) = z(M_3) = -1.$$

## 4. Застосування диференціального числення функції багатьох змінних до наближених обчислень

Розглянемо функцію двох змінних $z = f(x;y)$. Дана функція буде мати похідну в довільній точці $M(x,y)$, тобто буде диференційованою в цій точці, якщо виконуватиметься співвідношення (14.3) – формула ***"повного диференціала"***:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \tag{13.11}$$

Повний диференціал називають також головною частиною повного приросту диференційовної функції. При цьому виконується наближена рівність:

$$\Delta z \approx dz \qquad \text{або}$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y. \tag{13.12}$$

Рівність (13.12) широко використовується в наближених обчисленнях, оскільки диференціал функції обчислити простіше, ніж її повний приріст.

**Завдання 108.** Обчисліть наближено (за допомогою повного диференціала) значення:

$$arctg\left(\frac{1,97}{1,02}-1\right).$$

*Розв'язання*

Використовуючи запропоноване в умові значення $arctg\left(\frac{1,97}{1,02}-1\right)$, розглянемо функцію, що йому відповідає, у загальному вигляді:

$$z = arctg\left(\frac{x}{y}-1\right).$$

Застосуємо формулу (13.12), поклавши $x = 2$ та $y = 1$ – найближчі цілі значення для $1,97$ та $1,02$. Тоді похибку наближення $\Delta x$ знайдемо як різницю точного та наближеного значення величини, тобто

$$\Delta x = 1,97 - 2 = -0,03.$$

Аналогічно знаходимо похибку наближення $\Delta y$:

$$\Delta y = 1,02 - 1 = 0,02.$$

Обчисливши частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, отримаємо:

$$arctg\left(\frac{x+\Delta x}{y+\Delta y}-1\right) \approx arctg\left(\frac{x}{y}-1\right) + \frac{y}{y^2+(x-y)^2}\Delta x - \frac{x}{y^2+(x-y)^2}\Delta y.$$

Підставимо числові значення:

$$arctg\left(\frac{2-0{,}03}{1+0{,}02}-1\right)\approx arctg\left(\frac{2}{1}-1\right)+\frac{1}{1+(2-1)^2}(-0{,}03)-\frac{2}{1+(2-1)^2}0{,}02\cdot$$

Тобто

$$arctg\left(\frac{1{,}97}{1{,}02}-1\right)\approx\frac{\pi}{4}-0{,}015-0{,}02=0{,}75\,.$$

**Відповідь:** $arctg\left(\frac{1{,}97}{1{,}02}-1\right)\approx 0{,}75\,.$

## 5. Оптимізація в економічних задачах

Багато задач економіки тісно пов'язано з поняттям оптимізації: оптимальний розподіл ресурсів та товарів, визначення мінімальних затрат та максимального прибутку тощо. Для розв'язання таких задач часто використовують функції багатьох змінних.

Нехай фірма випускає один товар обсягом $q$ одиниць і використовує для його виробництва певні ресурси. Введемо позначення:

$x_1, x_2, ..., x_n$ – обсяги річних ресурсів, які фірма використовує для випуску продукції; $p_1, p_2, ..., p_n$ – їх відповідні ціни (це сталі величини).

Зрозуміло, що витрати виробництва пов'язані з випуском продукції, тобто обсяг товару $q$, що випускається, залежить від обсягу ресурсів $x_1, x_2, ..., x_n$, які використовуються в процесі виробництва. Цей зв'язок визначає деяка виробнича функція:

$$q=f\left(x_1;x_2;...;x_n\right).$$

***Означення. Доходом R фірми*** *за певний період часу називають добуток загального обсягу продукції* $q$*, що випускається, на ціну (ринкову)* $p_0$ *цієї продукції, тобто*

$$R = p_0 q = p_0 \cdot f(x_1, x_2, ..., x_n). \qquad (13.13)$$

***Означення. Витратами C фірми*** *називають її загальні витрати за певний проміжок часу, тобто якщо* ***фактори виробництва*** $x_1, x_2, ..., x_n$ *(обсяги ресурсів, які використовує фірма) та* $p_1, p_2, ..., p_n$ *(ринкові ціни на ці ресурси), то*

$$C = p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n. \qquad (13.14)$$

***Означення. Прибутком P фірми*** *за певний проміжок часу називають різницю між одержаним нею доходом та витратами виробництва, тобто*

$$P = R - C. \qquad (13.15)$$

Формулу (13.15) можна ще записати у вигляді:

$$P(x_1, x_2, ..., x_n) = p_0 \cdot f(x_1, x_2, ..., x_n) - (p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n). \qquad (13.16)$$

Зазвичай вважають, що якщо фірма функціонує в умовах чистої конкуренції, то на ринкові ціни $p_0, p_1, p_2, ..., p_n$ вона випливу не має, тобто фірма з цінами "погоджується". Інші випадки функціонування фірми (в умовах чистої монополії, монополістичної конкуренції та олігополії) детально розглядаються в межах курсу мікроекономіки.

Основне завдання багаторесурсної фірми полягає в тому, що фірма намагається одержати максимальний прибуток шляхом раціонального розподілу ресурсів, які використовуються у виробництві. З математичної точки зору це завдання зводиться до ***дослідження функції прибутку на екстремум***.

***Означення.*** *Набір ресурсів, який забезпечує фірмі максимальний прибуток, називають* ***оптимальним****.*

**Завдання 109.** Деяка фірма випускає два види товарів у обсягах $x$ та $y$ одиниць. Ціни на ці товари становлять відповідно $p_x = 8$ та $p_y = 10$ умовних грошових одиниць, а функція витрат має вигляд $C(x;y) = x^2 + xy + y^2$. Дослідіть значення максимального прибутку, що його може одержати фірма.

*Розв'язання*

Фірма випускає два види продукції. Використовуючи рівність (13.13), запишемо функцію, що виражатиме загальний дохід фірми:

$$R = x \cdot p_x + y \cdot p_y = 8x + 10y.$$

Тоді прибуток фірми описує функція двох змінних виду (13.15), тобто

$$P = R - C = 8x + 10y - \left(x^2 + xy + y^2\right) = 8x + 10y - x^2 - xy - y^2.$$

Щоб знайти максимальне значення прибутку, дослідимо утворену функцію двох змінних на екстремум. Для цього знайдемо частинні похідні першого порядку та прирівняємо їх до нуля.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 8 - 2x - y; \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 10 - x - 2y.$$

Тоді необхідні умови існування екстремуму запишемо у вигляді системи:

$$\begin{cases} 8 - 2x - y = 0 \\ 10 - x - 2y = 0 \end{cases}, \quad \text{або} \quad \begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + 2y = 10 \end{cases}.$$

Розв'язок даної системи – це критична точка $M(2;4)$. Для того, щоб перевірити достатні умови екстремуму, знайдемо значення частинних похідних другого порядку та обчислимо їх значення в критичній точці. При цьому використаємо позначення (13.4):

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(8 - 2x - y) = -2 = A;$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(10 - x - 2y) = -1 = B;$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(10 - x - 2y) = -2 = C.$$

Тоді значення визначника (13.5) буде:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = (-2)\cdot(-2) - (-1)^2 = 4 - 1 = 3 > 0.$$

Враховуючи, що $\Delta > 0$ і $A = -2 < 0$, робимо висновок про те, що точка $M(2;4)$ – точка максимуму функції прибутку.

Максимальне ж значення самого прибутку – це значення функції прибутку в точці максимуму, тобто:

$$P_{\max} = P(2;4) = 8\cdot 2 + 10\cdot 4 - 2^2 - 2\cdot 4 - 4^2 = 16 + 40 - 4 - 8 - 16 = 28.$$

**Відповідь:** $P_{\max} = P(2;4) = 28$ умовних грошових одиниць.

Розглянемо ще одне завдання, пов’язане з дослідженням на умовний екстремум.

**Завдання 110.** Задано виробничу функцію, що залежить від двох змінних: $q(x;y) = 5xy$, де $x$ – витрати основних фондів, $y$ – витрати людської праці, а також задано відповідні ціни на ресурси $p_x = 10$ та $p_y = 8$ умовних грошових одиниць. Дослідіть, якого значення мають набути величини $x$ та $y$ для того, щоб забезпечити мінімальні витрати виробництва за фіксованого обсягу продукції $q_0 = 1600$.

*Розв'язання*

Виробнича функція залежить від двох величин, тому витрати виробництва, враховуючи (13.14), матимуть вигляд:

$$C = 10x + 8y.$$

Дану функцію треба дослідити на мінімум.

Оскільки обсяг продукції фіксований, то $q(x;y) = q_0$, тобто $5xy = 1600$. Отже, додатковою умовою є рівність $5xy - 1600 = 0$, при $x > 0$, $y > 0$.

Дослідимо функцію на умовний екстремум методом ***зведення до задачі про безумовний екстремум***. Він полягає в тому, що необхідно спочатку розв'язати саму умову відносно однієї зі змінних, а потім підставити її розв'язок у функцію двох змінних, отримавши при цьому нову функцію, яка залежатиме вже від однієї змінної, та дослідити її на екстремум.

Розв'яжемо умову:

$$5xy - 1600 = 0;$$

$$5xy = 1600;$$

$$xy = \frac{1600}{5};$$

$$y = \frac{320}{x}.$$

Підставимо отримане значення у функцію витрат:

$$C = 10x + 8y = 10x + 8\frac{320}{x}.$$

Для дослідження функції на екстремум застосуємо другу похідну. Значення похідної першого порядку буде:

$$C' = 10 - \frac{2560}{x^2}.$$

Знайдемо критичні точки, прирівнявши похідну до нуля ($C' = 0$) та розв'язавши отримане рівняння:

$$10 - \frac{2560}{x^2} = 0;$$

$$\frac{2560}{x^2} = 10;$$

$$x^2 = 256;$$

$$x = \pm 16.$$

За умовою завдання (з економічних міркувань) $x > 0$, $y > 0$, отже, $x = -16$ – сторонній корінь. Знайдемо знак похідної другого порядку в критичній точці:

$$C'' = \left(10 - \frac{2560}{x^2}\right)' = \frac{5120}{x^3}.$$

$$C''(16) = \frac{5120}{16^3} > 0.$$

Отже, при $x = 16$ друга похідна додатна. А з другої ознаки дослідження функції на екстремум випливає, що в даній точці функція досягає мінімуму.

Враховуючи, що $x = 16$, знаходимо:

$$y = \frac{320}{x} = \frac{320}{16} = 20.$$

Точка мінімуму функції має координати $(16;20)$, а мінімум функції витрат:

$$C_{\min} = C(16;20) = 10 \cdot 16 + 8 \cdot 20 = 160 + 160 = 320$$

умов. грош. од.

**Відповідь:** $C_{\min} = C(16;20) = 320$ умов. грош. од.

**У результаті вивчення теми необхідно:**

| *знати* | *вміти* |
|---|---|
| - поняття абсолютного та умовного екстремуму функції багатьох змінних;<br>- теореми про необхідні та достатні умови існування екстремуму функції багатьох (двох) змінних. | - застосовувати диференціал функції багатьох змінних до наближених обчислень;<br>- проводити дослідження функції двох змінних на локальний екстремум, умовний екстремум, визначати вид екстремуму;<br>- використовувати диференціальне числення функції багатьох змінних для оптимізації економічних досліджень. |

**Питання для самоконтролю**

1. Сформулюйте поняття точок екстремуму (максимуму, мінімуму) функції двох змінних.
2. Вкажіть, чим відрізняються поняття "точки екстремуму" та екстремуми функції?
3. Сформулюйте означення критичних (стаціонарних) точок.
4. В чому полягають необхідні умови існування екстремуму?
5. Як формулюються достатні умови екстремуму функції двох змінних?
6. За яким алгоритмом досліджують функцію двох змінних на екстремум?
7. Опишіть покроково процес дослідження функції двох змінних на найбільше та найменше значення.
8. Що розуміють під поняттям умовного екстремуму функції двох змінних?
9. У чому полягає суть методу невизначених множників Лагранжа для дослідження функції двох змінних на умовний екстремум?
10. Поясніть, як використовують повний диференціал функції в наближених обчисленнях?
11. Сформулюйте математичні означення економічних понять "дохід", "витрати", "прибуток", "оптимальний прибуток".

## Завдання для самостійного розв'язання

***Рівень 1***

**158.** Запишіть послідовність, яка задана загальним членом $\frac{n-1}{n+1}$, обчисливши її перші чотири члени.

**159.** Обчисліть границі функції в точці:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(5x^2-6x+7\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 2}(5x^3-6x^2+x-5)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\sin x$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-2x}{2x^2-5x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x+1}{x-3}$.

**160.** Обчисліть границі функції на нескінченності:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-5x+6)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-6x^2+5x-1)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{4x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{5x+1}$.

**161.** Побудуйте графік функції $y=2x+3$, надаючи абсцисі послідовно значення $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$, знайти приріст ординат: $y_2-y_1$, $y_3-y_2$, $y_4-y_3$, $y_3-y_1$, $y_4-y_1$ та відношення приростів: $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, $\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$, $\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}$, $\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$, $\frac{y_4-y_1}{x_4-x_1}$.

**162.** Використовуючи означення похідної, знайдіть похідні функцій:

а) $y = \frac{1}{x}$; б) $y = 4x - 3$.

**163.** Знайдіть похідні заданих функцій:

а) $y = 4x^3 - 2x^2 + x - 5$; б) $y = -x^4 + 9x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 6$; в) $y = (9 - x^2)^4$;

г) $y = (x^3 - 1)(x^2 + x + 1)$; д) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$;

е) $y = x(1 - x^2)$;

є) $y = \frac{x^2 + x + 1}{x - 3}$; ж) $y = 2^x$;

з) $y = \frac{\ln x}{x}$.

**164.** Дослідіть функцію на екстремум (за першим та другим правилом):

а) $y = x^3 + x^2 - 8x + 1$; б) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 7$.

## ***<u>Рівень 2</u>***

**165.** Запишіть загальний член послідовності натуральних чисел, кожне з яких при діленні на 3 має в остачі число 1.

**166.** Обчисліть границі функції в точці:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^3 - 2x^2}{5x^3 - 4x^2}$; б) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 9x}$; в) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$;

г) $\lim\limits_{x \to -\frac{3}{2}} \frac{4x^2 - 9}{2x + 3}$.

**167.** Обчисліть границі функції на нескінченності:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+1}{x^3+4x^2+2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x^6}{x^3+x^4}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x^3+1}{x^3+2x^2+x}$.

**168.** Чи можна визначити $\Delta y$, знаючи лише, що $\Delta x = 3$, якщо $y = 4x - 9$?

**169.** Обчисліть границі, користуючись визначними (чудовими) границями:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$.

**170.** Дослідіть, чи є число 1 границею числової послідовності $x_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ при $n \to \infty$.

**171.** Покажіть, що при $x = 4$ функція $y$ має розрив. За умови позитивної відповіді дослідіть, якого він роду.

а) $y = \dfrac{x}{x-4}$; б) $y = arctg\,\dfrac{1}{x-4}$.

**172.** Дослідіть, якими є функції $x^4 - 2x^3 + x^2 + 6$ і $\dfrac{5x-2}{x^2+3}$ – неперервні при всіх дійсних значеннях $x$ чи розривні. При необхідності, визначте точку розриву.

**173.** Знайдіть похідні заданих функцій:

а) $y = 2\sin x - \cos 2x + 4$; б) $y = tgx \cdot \sin^2 x$;

в) $y = x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6xtgx - 6\cos 2x$; г) $y = \dfrac{1+\sin 3x}{\cos^3 x}$;

д) $y = \dfrac{tg4x + 8x}{\cos 9x}$; е) $y = \dfrac{arctg2x}{1-x^2}$;

є) $y = \arcsin 2x$; ж) $y = \arcsin\sqrt{x^2 - 1}$;

з) $y = \ln^3(x^2 - 1)$; и) $y = (x^2 - 3)(x + 5)(x - 2)$.

**174.** Доведіть, що:

а) $\frac{d}{dx}(a + bx + cx^2) = b + 2cx$;

б) $\frac{d}{dx}(2x^{-2} + 3x^{-3}) = -4x^{-3} - 9x^{-4}$;

в) $\frac{d}{dt}\left(9t^{\frac{5}{3}} + t^{-1}\right) = 15t^{\frac{2}{3}} - t^{-2}$.

**175.** Запишіть рівняння дотичної і нормалі до графіка функції:

1) $f(x) = (x^2 - 3)(x^3 + 5x)$ в точці $x_0 = 1$;

2) $f(x) = \frac{2x + 3}{x^2}$ в точці $x_0 = 3$.

**176.** Дослідіть функцію на парність (непарність, ні парність ні непарність):

а) $f(x) = x^4 + 5x^2$; б) $f(x) = x^2 + x$;

в) $f(x) = \frac{x}{2^{x^2} - 1}$;

г) $f(x) = \frac{x}{\cos x} + tgx$; д) $f(x) = \lg x^2 + \frac{x^3}{\sin x}$;

е) $f(x) = tgx + \cos x + \sin x$.

**177.** Дослідіть, коли швидкість точки, що рухається прямолінійно за законом $s = t^2 - 4t + 5$, рівна нулю?

**178.** Знайдіть прискорення точки в певний момент часу $t$, якщо швидкість точки, що рухається прямолінійно, визначається законом:

а) $v(t) = t^3 - 2t$, $t = 2$; б) $v(t) = 2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)$, $t = \dfrac{2\pi}{3}$.

**179.** Знайдіть момент часу $t$, в який прискорення точки, що рухається прямолінійно за законом $s(t) = -t^3 + 3t^2 - 8$, рівне нулю. Яка при цьому швидкість точки?

**180.** Дослідіть, як поводить себе функція $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ на проміжках $\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$ і $\left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right)$: зростатиме чи спадатиме?

**181.** Дослідіть функцію на екстремум (за першим та другим правилом):

а) $y = 3x - \dfrac{27}{2-x}$; б) $y = \dfrac{3x}{x^2+1}$;

в) $y = x^2 \cdot e^{-x}$; г) $y = \dfrac{e^x}{x}$.

**182.** Дослідіть на опуклість та точки перегину графіки функцій:

а) $y = -x^4 - 2x^3 + 12x^2 + 15x - 6$; б) $y = \dfrac{x-5}{x+7}$;

в) $y = \ln\left(x^2 + 4\right)$; г) $y = 5 + \sqrt[3]{x-4}$.

**183.** Для кривої $y = 2 - \dfrac{1}{3}x^2$ дослідіть напрям вгнутості.

**184.** Дослідіть напрямок опуклості кривої $f(x) = \dfrac{1}{x}$ в точках $x_1 = -2$ та $x_2 = 1$.

**185.** Дослідіть, чи буде функція $y = t\sqrt{t} + 3\sqrt{t} + 5t$ зростаючою у своїй області визначення.

**186.** Дослідіть, чи існують найбільше та найменше значення функції $y = f(x)$ на даному проміжку і якщо існують, то знайдіть їх:

а) $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 1$, $\quad [-4;4]$;

б) $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 1$, $\quad [-4;0]$;

в) $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x + 2}$, $\quad [0;10]$;

г) $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x + 2}$, $\quad [0;+\infty]$;

д) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $\quad (-\infty;+\infty)$.

**187.** Знайдіть диференціал функції:

1) $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$; $\qquad$ 2) $y = \ln\cos x$;

в) $y = arctg\sqrt{4x - 1}$.

**188.** Дослідіть, чи функція $z$ задовольняє відповідне диференціальне рівняння:

а) функція $z = \cos\left(x^2 + y^2\right)$, рівняння $y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$;

б) функція $z = \sin\left(x - ay\right) + \cos\left(x + ay\right)$, рівняння

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

**189.** Перевірте, чи правильно для заданих функцій знайдено повний диференціал:

а) $u = by^2 x + cx^2 + gv^3 + ex$,

$du = \left(by^2 + 2cx + e\right)dx + \left(2byx + 3gy^2\right)dy$;

б) $u = x^{\ln y}$, $\qquad du = u\left(\dfrac{\ln y}{x}x + \dfrac{\ln x}{y}dy\right)$;

в) $u = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}$,

$$du = \left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)dy + \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}\right)dz .$$

**190.** Дослідіть на екстремум функцію двох змінних $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

***Рівень 3***

**191.** Обчисліть границі функції в точці:

а) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{12}{x^3+8}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{3}{x^3+1} - \dfrac{1}{x+1}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$; д) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

**192.** Обчисліть границі функції на нескінченності:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$.

**193.** Обчисліть границі, користуючись визначними (чудовими) границями:

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 2x - 1}{x\cdot\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 9x}{\sin 8x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x+1}\right)^{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+0,5}$.

**194.** Знайдіть похідні заданих функцій:

а) $y=\frac{(x^3-1)^4}{(x^2+1)^3}$; б) $y=(2x+1)^2\cdot\sqrt{1-2x}$;

в) $y=\sqrt{x^3+4x}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$; г) $y=\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

д) $y=\ln(\sin x+\sqrt{\sin^2 x-1})$; е) $y=\sqrt[3]{\frac{1-\sin 2x}{\cos 3x}}$;

є) $y=arcctg\sqrt{\frac{1-x}{x}}$; ж) $y=x\arcsin\frac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$;

з) $y=(x^2+x^3+2x)\cdot 3^{x^2+36x+10}$; и) $y=(\cos x)^x$.

**195.** Знайдіть похідну функції, оберненої до:

1) $y=\frac{\cos x}{2\sin^2 x}$; 2) $y=\sqrt{\frac{x+5}{x-5}}$.

**196.** Дослідіть, чи задовольняє функція $f(z)=\frac{\cos^2 z}{1+\sin^2 z}$ рівняння $f\left(\frac{\pi}{4}\right)-3f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=3$.

**197.** Дослідіть, яке з тверджень істинне: а) похідна двох парних та двох непарних функцій є функція парна; б) похідна парної та непарної функції є непарною функцією.

**198.** Дослідіть, який кут утворює з віссю абсцис дотична до параболи $y=x^2-3x+5$, проведена в точці $M_0(2;3)$? Складіть рівняння дотичної.

**199.** Обчисліть границю, використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{ctg\pi x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

**200.** Проведіть повне дослідження функції. За його результатами побудуйте графік даної функції:

а) $y=x^3-4x^2-3x+6$; б) $y=\dfrac{x^2-9}{x^2-4}$;

в) $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$; г) $y=(x+4)^2(x-5)$.

**201.** Дослідіть, чи задовольняє:

а) функція $y=\sqrt{2x-x^2}$ рівняння $y^3y''+1=0$;

б) функція $y=e^x+2e^{2x}$ рівняння $y'''-6y''+11y'-6y=0$.

**202.** Сума основи та висоти трикутника дорівнює 12 см. Дослідіть, якою повинна бути основа, щоб площа трикутника була найбільшою?

**203.** Дослідіть, як потрібно розбити число 5 на два доданки так, щоб сума їх кубів була найменшою?

**204.** Закон зміни температури T тіла залежно від часу *t* задано рівнянням $T=0{,}2t^2$. Дослідіть, з якою швидкістю нагрівається це тіло в момент часу *t=10*?

**205.** Потрібно виготовити закритий циліндричний бак об’ємом 250 $\pi$ см$^3$. Встановіть, якими повинні бути його розміри, щоб на його виготовлення пішла найменша кількість матеріалу?

**206.** Об’єм добування щебеню $Y$ (т/год.) залежить від кількості вкладеної праці (люд/год.) так: $Y=6\sqrt{x}$. Ціна щебеню $v=40$ грн./т, зарплата робітника $p=30$ грн./ч. Крім зарплати, ніякі відрахування не ведуться. Знайдіть оптимальну кількість $x$ вкладеної праці.

**207.** Дослідіть на неперервність функцію $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-6)}$ на сегменті:

а) $[2;5]$; б) $[4;10]$; в) $[0;7]$.

**208.** Дослідіть на неперервність функцію $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - 5x + 4}$ в точці $x_0 = 2$.

**209.** Для заданих функцій знайдіть точки розриву та дослідіть їх характер:

а) $y = \dfrac{x}{x-3}$; б) $y = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 8}$; в) $y = 3^{\frac{1}{x}}$.

**210.** Дослідним шляхом були встановлені функції попиту $q = \dfrac{p+8}{p+2}$ та пропозиції $s = p + 0{,}5$, де $q$ та $s$ – кількість товарів, відповідно, що купується і пропонується для продажу за одиницю часу, $p$ – ціна товару. Знайдіть:

а) рівноважну ціну, тобто ціну, за якої попит та пропозиція врівноважуються;

б) еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни;

в) зміну доходу при збільшенні ціни на 5% від рівноважної.

**211.** Покажіть, що крива $y = \dfrac{x+1}{x^2 + 1}$ має три точки перегину, які лежать на одній прямій.

**212.** Дослідіть, при якому значенні параметра $a$ функція $f(x) = a \cdot \sin x + \dfrac{1}{3}\sin 3x$ має екстремум при $x = \dfrac{\pi}{3}$? Який це буде екстремум: максимум чи мінімум?

**213.** Дослідіть, при яких значеннях параметрів $a$ і $b$ точка (1;3) є точкою перегину кривої $y = ax^3 + bx^2$?

**214.** Залежність між витратами виробництва $y$ і обсягом продукції $x$, що випускається, визначається функцією $y = 50x - 0{,}05x^3$ грош. од. Визначте середні та граничні витрати за умови, що обсяг продукції 10 одиниць.

**215.** Припускаючи, що функція попиту на товар $A$ є $f(p_1; p_2) = 25 - 2p_1 + p_2$, знайдіть частинні показники еластичності.

**216.** Обсяг виготовленої продукції $y$ (ум. од.) цеху протягом робочого дня виражається такою функцією $y = -t^3 - 5t^2 + 75t + 425$, де $t$ – кількість годин роботи. Знайдіть обсяг випуску продукції через 2 години після початку робочого дня.

**217.** Перевірте, чи функція $y = \ln\dfrac{1}{1+x}$ задовольняє рівняння $x \cdot \dfrac{dy}{dx} + 1 = e^y$.

**218.** Знайдіть еластичність функції:

а) $y = x + 2\sqrt{x}$; б) $y = \dfrac{\cos x}{x}$;

в) $y = x^2 e^x$;

г) $y = \ln\left(x^2 + 2x\right)$; д) $y = \dfrac{1+e^x}{1-e^y}$;

е) $y = x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}$.

**219.** Необхідно обгородити прямокутну ділянку землі з таким розрахунком, щоб площа ділянки дорівнювала 216 м $^2$, і поділити потім цю ділянку огорожею на 2 рівні частини. Дослідіть, якими повинні бути розміри ділянки, щоб на побудову огорожі пішло найменше матеріалів.

**220.** Спортивний майданчик прямокутної форми площею 810 м $^2$ потрібно обгородити з півночі та півдня дерев'яним парканом, з сходу та заходу – металевим. Встановлення 1 м дерев'яного паркану обійдеться в 50 грн., металевого – в 20 грн. Дослідіть, якими повинні бути розміри майданчика, щоб витрати на його встановлення були найменшими.

**221.** Витрати на виробництво (К грн.) пов'язані з випуском продукції $x$ тис. одиниць такою функцією: $K = 0{,}00025x^3 + 0{,}0025x^2 + 0{,}58x + 19$. Дослідіть значення граничних витрат при випуску 20 тис. одиниць продукції.

**222.** Витрати виробництва залежать від обсягу продукції $x$ за формулою $y = 100x - \dfrac{x^3}{30}$. Знайдіть граничні витрати за умови, що обсяг складає 5 одиниць. Дослідіть, як зміняться витрати виробництва, якщо обсяг становитиме 10 одиниць.

**223.** Функції довготривалого попиту $d$ і пропозиції $s$ від ціни $p$ на світовому ринку нафти мають відповідно вигляд $d = 30 - 0{,}9p$, $s = 16 + 1{,}2p$.

1) Знайдіть еластичність попиту в точці рівноважної ціни.

2) Дослідіть, як зміниться рівноважна ціна та еластичність попиту при зменшенні пропозиції нафти на ринку на 25%?

**224.** Виробник реалізує свою продукцію за ціною $p$ грн. за одиницю, а витрати при цьому задаються залежністю $S(x) = ax + \lambda x^3 \quad \left(a < p, \lambda > 0\right)$. Знайдіть оптимальний для виробництва обсяг випуску продукції та прибуток, який йому відповідає.

**225.** Для заданої функції дослідіть, чи виконується рівність у частинних похідних:

а) $u = \sqrt{xy + \dfrac{ax}{y}}$, $\qquad u\left(x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = xy$;

б) $u = x + \dfrac{x - y}{y - z}$, $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 1$;

в) $u = \dfrac{x^2 y^2}{x + y}$, $\qquad x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2\dfrac{\partial u}{\partial x}$;

г) $u = tg(y + ax) + (y - ax)^{\frac{3}{2}}$, $\qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

**226.** Фірма виробляє два види товарів $G_1$ і $G_2$ та продає їх за ціною 1000 грош. од. та 800 грош. од. відповідно. Обсяги випуску товарів $Q_1$ і $Q_2$. Функція витрат має вигляд: $C = 2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2$. Дослідіть, при яких значення $Q_1$ і $Q_2$ прибуток, отриманий фірмою, буде максимальний. Знайти цей прибуток.

# *Модуль 4.*

# Інтегральне числення. Диференціальні рівняння

## ТЕМА 14. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

***План***

1. *Первісна функції. Невизначений інтеграл.*
2. *Таблиця основних невизначених інтегралів. Основні правила (властивості) інтегрування.*
3. *Основні методи інтегрування: частинами, заміною змінних.*
4. *Інтегрування деяких спеціальних класів функцій (дробово-раціональних, тригонометричних, ірраціональних).*

*Основні терміни та поняття:* функція, похідна, первісна, невизначений інтеграл, підінтегральний вираз, підінтегральна функція, стала інтегрування, методи інтегрування, заміна змінної (метод підстановки), інтегрування частинами, граничний дохід, гранична ціна, дробово-раціональна функція, невизначені коефіцієнти, дріб, тригонометричні та ірраціональні функції.

### 1. Первісна функції. Невизначений інтеграл

Вивчаючи диференціальне числення, вирішували основне його завдання: знайти похідну від заданої функції. Різноманітні питання вищої математики та її застосування в економіці приводять до оберненої задачі: знайти значення функції за її похідною. З математичної точки зору для заданої функції $f(x)$ потрібно знайти таку функцію $F(x)$, похідна якої б дорівнювала $f(x)$.

Розглянемо дане твердження на конкретному прикладі.

Нехай потрібно знайти функцію, похідна якої дорівнює 2. За допомогою символів дане завдання можна записати так: знайти таку функцію $F(x)$, похідна якої задовольняє умову:

$$f(x) = 2 \,. \tag{14.1}$$

На основі поняття похідної функції легко зауважити, що шуканою буде функція

$$F(x) = 2x \,,$$

адже

$$F'(x) = (2x)' = 2 = f(x) \,.$$

Проте функції $F(x) = 2x + 5$, $F(x) = 2x - 542$ та інші, які можна записати в загальному вигляді

$$F(x) = 2x + C \,,$$

де $C$ – довільна стала, також задовольнятимуть умову (15.1). Справді,

$$F'(x) = (2x + 5)' = (2x)' + (5)' = 2 = f(x) \,;$$

$$F'(x) = (2x - 542)' = (2x)' - (542)' = 2 = f(x) \,;$$

……..

$$F'(x) = (2x + C)' = (2x)' + (C)' = 2 = f(x) \,. \tag{14.2}$$

***Означення.*** *Функція* $F(x)$ *називається* ***первісною*** *для функції* $f(x)$ *на деякій множині* $X$*, якщо для довільного* $x \in X$ *виконується рівність* $F'(x) = f(x)$.

Операція відшукання первісної для заданої функції є оберненою до процесу диференціювання та називається ***інтегруванням***, а способи інтегрування функцій вивчають у розділі вищої математики – інтегральному численні.

Приймемо без доведення наступне твердження.

**Лема 1**. Якщо первісна функції $f(x)$ є $F(x)$, то первісною буде також функція вигляду $F(x)+C$, де $C - const$.

Дійсно, за умовою $F'(x) = f(x)$. Тоді

$$(F(x)+C)' = F'(x)+C' = F'(x) = f(x). \qquad (14.3)$$

Отже, усі первісні функції знаходяться з точністю до сталої.

***Означення. Невизначеним інтегралом*** *функції* $f(x)$ *називається множина всіх її первісних.*

Для позначення невизначеного інтеграла використовують символ «$\int$ ». На основі означення невизначеного інтеграла та рівності (14.2) можна стверджувати:

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \qquad (14.4)$$

де $\int f(x)dx$ – **невизначений інтеграл** функції $f(x)$;

$f(x)dx$ – **підінтегральний вираз**;

$f(x)$ – **підінтегральна функція**;

$F(x)$ – **первісна** функції $f(x)$;

$C$ – **стала інтегрування**.

## 2. Таблиця основних невизначених інтегралів. Основні правила (властивості) інтегрування

Із означення невизначеного інтеграла випливають такі формули, які називають табличними інтегралами.

Таблиця 14.1

**Таблиця основних невизначених інтегралів**

| $\int f(x)dx$ | $F(x)+C$ |
|---|---|
| $\int dx$ | $x+C$ |
| $\int x^n dx$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1}+C, n\neq -1$ |
| $\int \frac{dx}{x}$ | $\ln\|x\|+C$ |
| $\int a^x dx$ | $\frac{a^x}{\ln a}+C$ |
| $\int e^x dx$ | $e^x+C$ |
| $\int \cos x dx$ | $\sin x+C$ |
| $\int \sin x dx$ | $-\cos x+C$ |
| $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ | $tgx+C$ |
| $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$ | $-ctgx+C$ |
| $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$ | $\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\|+C$ |

| | |
|---|---|
| $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ | $\arcsin \frac{x}{a} + C$ |
| $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ | $-\arccos \frac{x}{a} + C$ |
| $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$ | $\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$ |
| $\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$ | $\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + C$ |
| $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$ | $\ln\left\|x + \sqrt{x^2 + a}\right\| + C$ |

Сформулюємо найважливіші ***властивості (правила) інтегрування***.

**1.** Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції, тобто

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x). \qquad (14.5)$$

**2.** Сталий множник можна винести за знак невизначеного інтеграла, тобто

$$\int Cf(x)dx = C \cdot \int f(x)dx. \qquad (14.6)$$

**3.** Невизначений інтеграл алгебраїчної суми декількох функцій дорівнює алгебраїчній сумі невизначених інтегралів цих функцій, тобто

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx. \qquad (14.7)$$

**Завдання 111.** Обчисліть $\int (2x+3)dx$ та виконайте перевірку отриманого результату.

*Розв'язання*

Скористаємось основними властивостями та таблицею інтегралів

$$\int \bigl(2x+3)\bigr)dx = \int 2xdx + \int 3dx = 2\int xdx + 3\int dx = 2\cdot\frac{x^2}{2} + 3\cdot x + C = x^2 + 3x + C \cdot$$

Для перевірки правильності отриманого результату скористаємось твердженням, що процес інтегрування є оберненим до процесу диференціювання. Тобто покажемо, що виконується умова $F'(x) = f(x)$.

Враховуючи рівність (14.3), маємо, що для даного завдання $f(x) = 2x + 3$, а $F(x) + C = x^2 + 3x + C$. Тоді:

$$(F(x)+C)' = (x^2 + 3x + C)' = \left(x^2\right)' + \left(3x\right)' + C' = 2x + 3 = f(x).$$

Отже, невизначений інтеграл обчислено правильно.

**Відповідь:** $F(x) = x^2 + 3x + C$.

Інтегрування за допомогою основних властивостей та з використанням таблиці називають ще ***безпосереднім інтегруванням***.

Поняття невизначеного інтеграла широко використовується й для розв'язання завдань економічного змісту.

**Завдання 112.** Граничний дохід підприємства описується функцією $R'(x) = 50000 - x$, де $x$ – кількість виробленої продукції. Дослідіть, якою буде функція сукупного доходу підприємства, якщо нульовий випуск продукції дає нульовий дохід?

*Розв'язання*

Нагадаємо, що *граничний (маржинальний) дохід являє собою додатковий дохід, який отримує підприємство від продажу окремої додаткової одиниці товару.* Він також характеризується як дохід, який був отриманий від реалізації продукту після відшкодування змінних витрат. Саме граничний дохід є головним джерелом утворення прибутку, а також покриття постійних витрат. У практичній, а також науковій літературі під граничним доходом розуміється *різниця між виручкою підприємства та його змінними витратами*. При цьому фактично маржинальний прибуток містить у своєму значенні дві основоположні складові: постійні витрати підприємства і його прибуток. Таким чином, виходить, що чим більшою буде його сума, тим більшою буде й імовірність компенсації постійних витрат організації та отримання нею прибутку від господарської діяльності.

Отже, граничний дохід являє собою приріст сукупного доходу в результаті збільшення випуску продукції на одну одиницю.

За умовою приріст сукупного доходу задано формулою $R'(x) = 50000 - x$. Тоді сам сукупний дохід $R(x) = \int R'(x)dx$.

За означенням граничного доходу:

$$R(x)=\int (50000 - x)dx = 50000x - \frac{x^2}{2} + C.$$

Враховуючи, що нульовий випуск продукції ($x = 0$) дає нульовий дохід ($R(x) = 0$), тобто виконується умова

$$R(0) = 0,$$

знайдемо точне значення сталої $C$:

$$R(0)=50000 \cdot 0 - \frac{0}{2} + C,$$

$$50000 \cdot 0 - \frac{0}{2} + C = 0,$$

$$C = 0.$$

Отже, сукупний дохід фірми можна описати за допомогою формули:

$$R(x) = 50000x - \frac{x^2}{2},$$

де $x$ – кількість виробленої продукції.

**Відповідь:** $R(x) = 50000x - \frac{x^2}{2}$.

Аналогічно можна розв’язати й наступне завдання.

**Завдання 113.** Нехай гранична ціна за продану продукцію описується формулою $C'(x) = \int (x+100)dx$, де $x$ – кількість проданої продукції. Якою буде загальна функція ціни за продану продукцію, якщо ціна 100 одиниць продукції дорівнює 40000 гривень?

*Розв’язання*

Враховуючи поняття граничної ціни, запишемо загальну функцію ціни проданої продукції:

$$C(x)=\int (x+100)dx = \frac{x^2}{2} + 100x + C.$$

Сформульоване завдання накладає додаткову умову:

$$C(100)=40000.$$

Використаємо її для обчислення конкретного значення сталої $C$. Тоді:

$$40000=\frac{100^2}{2} + 100 \cdot 100 + C,$$

$$80000=10000 + 20000 + 2C,$$

$$50000=2C,$$

$$C=25000.$$

Отже, загальна функція ціни за продану продукцію має вигляд:

$$\mathrm{C}(x)=\frac{x^2}{2} + 100x + 25000.$$

**Відповідь:** $\mathrm{C}(x)=\frac{x^2}{2} + 100x + 25000$.

## 3. Основні методи інтегрування: частинами, заміною змінних

Якщо невизначений інтеграл не можна знайти безпосереднім інтегруванням, то, в залежності від підінтегрального виразу, використовують основні методи, до яких відносять інтегрування частинами та заміною змінних (метод підстановки).

### а) Інтегрування частинами.

Якщо $U(x)$ та $V(x)$ – функції, що мають відповідні похідні $U'(x)$ та $V'(x)$, то за основним правилом диференціювання похідна добутку двох функцій дорівнює:

$$(UV)' = U'V + UV'.$$

Її можна переписати у вигляді:

$$U \cdot V' = \left(U \cdot V\right)' - U' \cdot V.$$

Проінтегрувавши обидві частини даної рівності, отримаємо:

$$\int V'Udx = UV - \int VU'dx + C .$$

Враховуючи, що $V'(x)dx = dV$, $U'(x)dx = dU$, знаходимо:

$$\int U \cdot dV = U \cdot V - \int V \cdot dU . \qquad (14.8)$$

Формулу (14.8) називають ***формулою інтегрування частинами***, а інтегрування з її використанням – *інтегруванням частинами*.

Суть методу інтегрування частинами полягає в тому, що знаходження даного інтеграла зводиться до знаходження іншого, який є або відразу табличним, або хоча б простішим даного.

Використання формули (14.8) на практиці зводиться до розбиття підінтегрального виразу на дві частини (два множники) $U$

та $dV$. Через $U$ позначають той вираз, від якого легше знайти диференціал $dU = U'(x)dx$, через $dV$ – той, від якого можна легко знайти інтеграл, адже $\int dV = V$.

***<u>Зауваження</u>.*** При знаходженні інтеграла $\int dV = V$ домовимося не вводити сталу інтегрування *С,* адже хоча даний вираз і входить до формули (15.8), проте після його знаходження невизначений інтеграл ще залишається. Сталу ж інтегрування прийнято записувати в кінці – після знаходження первісної функції.

**Завдання 114.** Знайдіть значення невизначеного інтеграла $\int xe^x dx$ частинами та виконайте перевірку диференціюванням.

*Розв'язання*

За допомогою формули інтегрування частинами (14.8) зведемо даний інтеграл до табличного. Використаємо такий спосіб запису, що дозволяє описати весь процес розв'язування – від поділу на частини до кінцевого результату:

$$\int x \cdot e^x dx = \left| \begin{matrix} U = x & dU = (x)' dx = dx \\ dV = e^x dx & V = \int e^x dx = e^x \end{matrix} \right| = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C = e^x (x-1) + C.$$

Для перевірки правильності отриманого результату знайдемо похідну функції $e^x(x-1)+C$, адже за формулою (14.5) потрібно, щоб виконувалася умова $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

Отже,

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(e^x(x-1)+C\right)' = \left(e^x(x-1)\right)' + C' = \left(e^x\right)' \cdot (x-1) + (x-1)' \cdot e^x =$$
$$= e^x(x-1) + e^x = x \cdot e^x - e^x + e^x = x \cdot e^x = f(x).$$

Тобто похідна від первісної дорівнює підінтегральній функції, що доводить правильність проведених обчислень.

**Відповідь:** $e^x(x-1)+C$.

Розглянемо ще декілька найтиповіших інтегралів, знаходження яких здійснюється методом інтегрування частинами.

**Завдання 115.** Знайдіть значення невизначеного інтеграла $\int x \cdot \sin x dx$ частинами.

*Розв'язання*

$$\int x \cdot \sin x dx = \begin{vmatrix} U = x & dU = dx \\ dV = \sin x dx & V = -\cos x \end{vmatrix} = x \cdot \cos x + \int \cos x dx = x \cdot \cos x + \sin x + C.$$

**Відповідь:** $x \cdot \cos x + \sin x + C$.

Інколи в одному й тому самому завданні доводиться декілька разів застосовувати метод інтегрування частинами.

**Завдання 116.** Знайдіть значення інтеграла

$$\int \left(x^2 + x - 2\right) \cdot e^{-3x} dx \text{ частинами.}$$

*Розв'язання*

Розв'язування даного завдання опишемо детально, включно з виконаними елементарними перетвореннями (спрощення) кінцевого результату.

$$\int \left(x^2 + x - 2\right) \cdot e^{-3x} dx = \begin{vmatrix} U = x^2 + x - 2 & dU = (2x+1)dx \\ dV = e^{-3x} dx & V = -\dfrac{1}{3} e^{-3x} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} e^{-3x} \cdot \left(x^2 + x - 2\right) +$$

$$+ \frac{1}{3} \cdot \int (2x+1) \cdot e^{-3x} dx = \begin{vmatrix} U = 2x+1 & dU = 2dx \\ dV = e^{-3x} dx & V = -\dfrac{1}{3} e^{-3x} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} e^{-3x} \cdot \left(x^2 + x - 2\right) -$$

$$-\left( -\frac{1}{3} \cdot (2x+1) \cdot e^{-3x} + \frac{2}{3} \cdot \int e^{-3x} dx \right) = -\frac{1}{3} \cdot \left(x^2 + x - 2\right) + \frac{1}{3} (2x+1) \cdot e^{-3x} -$$

$$-\frac{2}{3} \cdot \left( -\frac{1}{3} e^{-3x} \right) + C = -\frac{1}{3} \left( x^2 + x - 2 + (2x+1) \cdot e^{-3x} - \frac{2}{3} e^{-3x} \right) + C =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(x^2 + x - 2 + e^{-3x} \cdot \left(2x + 1 - \frac{2}{3}\right)\right) + C = -\frac{1}{3}\left(x^2 + x - 2 + e^{-3x} \cdot \left(2x + \frac{1}{3}\right)\right) + C \cdot$$

**Відповідь:** $-\frac{1}{3}\left(x^2 + x - 2 + e^{-3x} \cdot \left(2x + \frac{1}{3}\right)\right) + C \cdot$

**б) Інтегрування заміною змінних (за допомогою підстановки)**

Досить часто $\int f(x)dx$ можна спростити введенням такої нової змінної $t$, для якої $x = g(t)$. Тоді ***формула інтегрування за допомогою підстановки (заміною змінних)*** набуде вигляду:

$$F(x) = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt. \tag{14.9}$$

Цей метод використовується для зведення невизначеного інтеграла до табличного вигляду в тому випадку, коли підінтегральний вираз буде спрощено після такої заміни.

На практиці, використовуючи цей метод, пропонуємо виконувати записи в такій формі.

**Завдання 117.** Знайдіть значення невизначеного інтеграла $\int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}$ методом підстановки та перевірте виконання умови $F'(x) = f(x)$.

*Розв'язання*

Підінтегральний вираз містить функцію $y = e^x$ і в чисельнику, і в знаменнику дробу. Спростимо підінтегральний вираз, поклавши $e^x = t$. Після того, як у завданні всі значення змінної $x$ буде подано через нову змінну $t$, інтеграл набуде табличного вигляду $\int \frac{dt}{1 + t^2}$. Особливістю методу інтегрування невизначеного інтеграла заміною змінних є те, що кінцевий результат подають через ту змінну, яка була задана в умові завдання (у нас – змінна $x$). Тобто в отриманому виразі

$\int \frac{dt}{1+t^2} = arctgt + C$ необхідно здійснити повернення від змінної $t$ до змінної $x$.

Процес розв’язування можна детально описати таким способом:

$$\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \int \frac{e^x dx}{1+\left(e^x\right)^2} = \left| \begin{array}{c} e^x = t \\ \left(e^x\right)' dx = (t)' dt \\ e^x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{1+t^2} = arctgt + C = arctg\left(e^x\right) + C \cdot$$

Здійснимо перевірку виконання умови $F'(x) = f(x)$, тобто чи справді $\left(arctg(e^x) + C\right)' = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$. Для цього скористаємось правилом обчислення похідної складеної функції:

$$\left(arctg(e^x) + C\right)' = \left(arctg(e^x)\right)' + C' = \left(arctg(e^x)\right)' \cdot \left(e^x\right)' = \frac{1}{1+(e^x)^2} \cdot e^x = \frac{e^x}{1+e^{2x}}.$$

**Відповідь:** для функцій $f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$, $F(x) = arctg\left(e^x\right) + C$ умова $F'(x) = f(x)$ виконується.

Розглянемо ще одне завдання, розв’язання якого запишемо без словесного пояснення (за допомогою математичного виразу).

**Завдання 118.** Дослідіть значення невизначеного інтеграла $\int e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ методом підстановки.

*Розв’язання*

$$\int e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{c} \sqrt{x} = t, \\ \left(\sqrt{x}\right)' dx = (t)' dt, \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt, \\ \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt. \end{array} \right| = \int e^t \cdot 2dt = 2\int e^t dt = 2 \cdot e^t + C = 2 \cdot e^{\sqrt{x}} + C \cdot$$

**Відповідь**: $2 \cdot e^{\sqrt{x}} + C$.

## 4. Інтегрування деяких спеціальних класів функцій (дробово-раціональних, тригонометричних, ірраціональних)

**а) Інтегрування дробово-раціональних функцій з використанням методу невизначених коефіцієнтів розкладу правильного дробу на суму найпростіших.**

***Означення.*** *Функція виду* $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}$ *називається* ***дробово-раціональною***.

Якщо $m \geq n$, то дріб $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ називають ***неправильним***, а якщо $n < m$, то $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ – ***правильний*** дріб.

Для випадку $m \geq n$ у неправильному дробі $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ виділяють цілу частину шляхом поділу чисельника на знаменник. Тоді

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}, \tag{14.10}$$

де $R(x)$ – ціла частина (многочлен), $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ – правильний дріб (многочлен $P_1(x)$ має степінь, нижчий за степінь многочлена $Q(x)$).

**Завдання 119.** Дослідіть, якого вигляду набувають ціла та дробова частини підінтегральної функції невизначеного інтеграла

$$\int \frac{x^3}{x-2} dx \cdot$$

*Розв'язання*

Виділимо у підінтегральній функції $\dfrac{x^3}{x-2}$ цілу та дробову частину методом ділення (в стовпчик) чисельника на знаменник.

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} x^3 \\ x^3 - 2x^2 \end{array} & \dfrac{x-2}{x^2 - 2x - 4} \\
\hline
-\begin{array}{l} -2x^2 \\ -2x^2 + 4x \end{array} & \\
\hline
-\begin{array}{l} -4x \\ -4x + 8 \end{array} & \\
\hline
-8. &
\end{array}
$$

Тоді $\dfrac{x^3}{x-2} = \left(x^2 - 2x - 4\right) - \dfrac{8}{x-2}$,

де $R(x) = x^2 - 2x - 4$, $P_1(x) = -8$, $Q(x) = x - 2$.

**Відповідь:** ціла частина $R(x) = x^2 - 2x - 4$; дробова $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)} = -\dfrac{8}{x-2}$.

Оскільки інтегрування цілої частини $R(x)$ є не складним, то достатньо навчитися інтегрувати правильні дроби $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ $(n < m)$.

Інтегрування правильних дробово-раціональних функцій базується на їх розкладанні на суму простих дробово-раціональних функцій чотирьох типів:

$$1)\ \frac{A}{x-a}; \tag{14.11}$$

$$2)\ \frac{B}{(x-a)^k}; \tag{14.12}$$

$$3)\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q}; \qquad (14.13)$$

$$4)\ \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}, \qquad (14.14)$$

де $A, B, M, N, a, p, q$ – дійсні числа; рівняння $x^2 + px + q = 0$ не має дійсних коренів і $k = 2, \quad 3, \quad \ldots$ .

Інтегрування раціонального дробу $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ зводиться до інтегрування простих дробів з допомогою однієї важливої теореми алгебри.

***Теорема.*** *Кожен правильний раціональний дріб* $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ *розкладається на суму скінченного числа простих дробів.*

Щоб проінтегрувати правильний раціональний дріб, потрібно розкласти його знаменник на найпростіші множники й записати розклад даного дробу на елементарні (14.11)-(14.14). Можливі такі випадки (таблиця 14.2).

Таблиця 14.2

**Випадки розкладу раціонального дробу на суму найпростіших, залежно від розкладу знаменника на множники**

| № п.п | Корені знаменника | | Розклад раціонального дробу $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ на суму найпростіших |
|---|---|---|---|
| | тлумачення | математичний запис | |
| 1 | Дійсні та різні | $Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m)$ | $\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_m}{x-a_m}$ (14.15) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | Дійсні, а деякі з них кратні | $Q(x)=(x-a)(x-b)^k$ | $\frac{P_1(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{B_1}{x-b}+$ (14.16) $+\frac{B_2}{(x-b)^2}...+\frac{B_k}{(x-b)^k}$ |
| 3 | Дійсні та знаменник містить квадратний тричлен, що не розкладається на множники | $Q(x)=$ $=(x-a)(x-b)^k(x^{2.}+px+q)$ | $\frac{P_1(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}...+$ $+\frac{B_k}{(x-b)^k}+\frac{Dx+E}{x^2+px+q}$ (14.17) |
| 4 | Знаменник має вигляд | $Q(x)=(x-a)(x^{2.}+px+q)^k$ | $\frac{P_1(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{D_1x+E_1}{x^2+px+q}+$ $+\frac{D_2x+E_2}{(x^2+px+q)^2}+...+\frac{D_kx+E_k}{(x^2+px+q)^k}$ (14.18) |

***Зауваження.*** У формулах (14.15)-(14.18) невідомі коефіцієнти $A_1,...,A_m$, $B_1,...,B_k$, $D,D_1...,D_k$, $E,E_1...,E_k$ знаходяться за методом невизначених коефіцієнтів: суму дробів зводять до спільного знаменника та, користуючись поняттям рівності дробів, порівнюють чисельники правої та лівої частини формул (14.15)-(14.18) та розв'язують систему рівнянь.

Застосуємо метод невизначених коефіцієнтів для знаходження конкретного невизначеного інтеграла.

**Завдання 120.** Обчисліть невизначений інтеграл $\int\frac{x+8}{x^2+4x+4}dx$ методом невизначених коефіцієнтів.

*Розв'язання*

Оскільки знаменником дробу є квадратний тричлен, який можна згорнути та подати з допомогою формули скороченого множення (квадрат суми), то даний інтеграл набуде вигляду:

$$\int \frac{x+8}{x^2+4x+4}dx = \int \frac{x+8}{(x+2)^2}dx.$$

Для його розв'язання використаємо метод невизначених коефіцієнтів. Для цього розкладемо дану підінтегральну функцію (дріб) на суму найпростіших, врахувавши формулу (14.16). Тоді:

$$\frac{x+8}{(x+2)^2} = \frac{x+8}{(x+2)(x+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2} = \frac{Ax+2A+B}{(x+2)^2}.$$

Два дроби є рівними, якщо рівні їх чисельники та знаменники. Отже,

$$x+8 = Ax + (2A+B).$$

Вирази ж рівні тоді, коли рівні коефіцієнти біля невідомих у однакових степенях правої та лівої частини рівності. Оскільки права частина містить дві невідомі ($A$ та $B$), то від рівняння перейдемо до системи двох рівнянь з двома невідомими. Тобто:

$$\begin{array}{l|} x^1 \\ x^0 \end{array} \quad \begin{cases} A = 1, \\ 2A + B = 8 \end{cases}.$$

Використавши один із відомих способів розв'язання, знайдемо значення коефіцієнтів:

$$\begin{cases} A = 1, \\ B = 6. \end{cases}$$

Таким чином, за формулою (14.16) підінтегральну функцію можна розписати на суму двох дробів:

$$\frac{x+8}{x^2+4x+4} = \frac{1}{x+2} + \frac{6}{(x+2)^2}.$$

Знайдемо значення невизначеного інтеграла, використовуючи основні табличні інтеграли:

$$\int \frac{x+8}{x^2+4x+4}dx = \int \left( \frac{1}{x+2} + \frac{6}{(x+2)^2} \right) dx = \int \frac{dx}{x+2} + 6\int \frac{dx}{(x+2)^2} = \ln|x+2| - \frac{6}{x+2} + C,$$

де

$$\int \frac{dx}{x+2} = \left| \begin{array}{c} x+2=t, \\ (x+2)' dx = (t)' dt, \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln|x+2| + C,$$

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2} = \int (x+2)^{-2} dx = \frac{(x+2)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x+2} + C.$$

Зауважимо, що у першому інтегралі вираз $\ln|x+2|$ записуємо, пригадавши: підлогарифмічна функція завжди додатна.

**Відповідь:** $\ln|x+2| - \dfrac{6}{x+2} + C$.

**Завдання 121.** Дослідіть методом невизначених коефіцієнтів, який вигляд має розклад підінтегральної функції на множники, якщо $\displaystyle\int \frac{2x^2+2x+2}{(x-2)(x^2+1)} dx.$

*Розв'язання*

Випишемо раціональний дріб, що містить підінтегральна функція, та скористаємось формулою (14.18), адже знаменник даного дробу розкладається на множники виду $Q(x) = (x-a)(x^2 + px + q)^k$. Тому:

$$\frac{2x^2+2x+2}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+1)} =$$

$$= \frac{Ax^2 + A + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{x^2(A+B) + x(C-2B) + (A-2C)}{(x-2)(x^2+1)}.$$

Рівність чисельників та знаменників дробів дозволяє стверджувати, що коефіцієнти біля відповідних степенів невідомої рівні. А тому можна перейти до системи трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+B=2 \\ x^1 & C-2B=2 \\ x^0 & A-2C=2 \end{array}, \text{ або } \begin{cases} A+B=2 \\ C-2B=2 \\ A-2C=2 \end{cases}.$$

Розв'яжемо її методом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4+1=5.$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 8+2+4=14,\ \text{A}=\frac{\Delta A}{\Delta}=\frac{14}{5}.$$

$$\Delta B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4+2-2=-4,\ \text{B}=\frac{\Delta B}{\Delta}=-\frac{4}{5}.$$

$$\Delta C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4+2+4=2,\ \text{C}=\frac{\Delta C}{\Delta}=\frac{2}{5}.$$

Отже, розклад підінтегральної функції на суму найпростіших дробів набуде вигляду:

$$\frac{2x^2+2x+2}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{\frac{14}{5}}{x-2} + \frac{-\frac{4}{5}x+\frac{2}{5}}{x^2+1} = \frac{14}{5}\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{2}{5}\cdot\frac{2x-1}{x^2+1}.$$

**Відповідь:** $\frac{14}{5}\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{2}{5}\cdot\frac{2x-1}{x^2+1}$.

**б) Інтегрування тригонометричних функцій**

Нехай функція $R(u,v)$ – раціональна функція двох змінних, яка побудована з використанням дій додавання, віднімання, множення й ділення над аргументами. Наприклад, $R(u,v)=u^2+2v^2$, $R(u,v)=\frac{u+2v}{5-u^2}$ тощо.

Якщо дана підінтегральна функція тригонометрична, то найпоширенішими є такі випадки їх розв'язання.

1) Інтеграл виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$ розв'язується за допомогою універсальної підстановки $t = tg\frac{x}{2}$. Тоді:

$$x = 2arctgt, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2};$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

**Завдання 122.** Знайдіть $\int \frac{dx}{\sin x}$.

*Розв'язання*

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| t = tg\frac{x}{2}, \begin{matrix} dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}. \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \left( \frac{2dt}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{2t} \right) = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln\left| tg\frac{x}{2} \right| + C.$$

**Відповідь:** $\ln\left| tg\frac{x}{2} \right| + C$.

2) Інтеграл виду $\int R(tgx)dx$ розв'язується підстановкою $t = tgx$.

3) Інтеграл виду $\int \sin\alpha x \cdot \cos\beta x dx$, $\int \sin\alpha x \cdot \sin\beta x dx$, $\int \cos\alpha x \cdot \cos\beta x dx$ можна розкласти на суму інтегралів за допомогою відомих тригонометричних формул:

$$\sin\alpha x \cdot \cos\beta x = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x\right),$$

$$\sin\alpha x \cdot \sin\beta x = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\right),$$

$$\cos\alpha x \cdot \cos\beta x = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x\right).$$

4) Інтеграл виду $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$, де $n$ і $m$ – натуральні числа, обчислюють зниженням степенів тригонометричних функцій $\sin x$ та $\cos x$. Особливо просто інтеграл такого виду обчислюється, якщо одне з чисел $n$ або $m$ непарне.

**Завдання 123.** Знайдіть $\int \sin^8 x \cdot \cos^5 x dx$.

*Розв'язання*

$$\int \sin^8 x \cdot \cos^5 x dx = \int \sin^8 x \cdot \cos^4 x \cdot \cos x dx = \int \sin^8 x \cdot \left(\cos^2 x\right)^2 \cdot \cos x dx =$$

$$= \int \sin^8 x \cdot \left(1 - \sin^2 x\right)^2 \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{c} \sin x = t, \\ (\sin x)' dx = (t)' dt, \\ \cos x dx = dt. \end{array} \right| = \int t^8 \left(1 - t^2\right)^2 \cdot dt = \int t^8 \left(1 - 2t^2 + t^4\right) dt =$$

$$= \int \left(t^8 - 2t^{10} + t^{12}\right) dt = \frac{t^9}{9} - 2 \cdot \frac{t^{11}}{11} + \frac{t^{13}}{13} + C = \frac{1}{9}\sin^9 x - \frac{2}{11}\sin^{11} x + \frac{1}{13}\sin^{13} x + C \cdot$$

**Відповідь:** $\int \frac{1}{9}\sin^9 x - \frac{2}{11}\sin^{11} x + \frac{1}{13}\sin^{13} x + C$.

**в) Інтегрування ірраціональних функцій**

Інтегрування деяких ірраціональних функцій за допомогою певних підстановок зводиться до інтегрування раціональних функцій.

1) Інтеграл виду $\int R\left(\sqrt[n]{ax + b}\right) dx$ при $a \neq 0$ розв'язується підстановкою $t = \sqrt[n]{ax + b}$.

2) Інтеграл $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$ шляхом виділення повного квадрата під коренем, залежно від знака числа $a \neq 0$, зводиться до табличних інтегралів виду:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}; \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}; \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

3) Інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ при $a \neq 0$ шляхом виділення під коренем повного квадрата зводиться до табличного.

**Завдання 124.** Знайдіть $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

*Розв'язання*

Оскільки

$$x^2+x+1 = x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=\left(x^2+2x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4},$$

то заданий інтеграл можна звести до табличного $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C$, якщо покласти $x^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$, $a=\frac{3}{4}$.

Тоді:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}=\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right|+C=\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C.$$

**Відповідь:** $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C$.

**У результаті вивчення теми необхідно:**

| ***знати*** | ***вміти*** |
|---|---|
| - поняття первісної функції та невизначеного інтеграла;<br>- таблицю невизначених інтегралів;<br>- основні правила інтегрування;<br>- метод інтегрування заміною змінних;<br>- формулу інтегрування за частинами. | - знаходити первісні основних елементарних функцій;<br>- володіти технікою інтегрування, вказаними у змісті методами та використовувати їх до вирішення професійних завдань;<br>- розв'язувати завдання дослідницького характеру з використанням інтегрального числення. |

## Питання для самоконтролю

1. Яку функцію називають первісною для даної функції?
2. Запишіть формулу, що формулює поняття первісної.
3. Що називають невизначеним інтегралом даної функції?
4. Які основні властивості невизначеного інтеграла (сформулюйте словесно та аналітично)?
5. Запишіть основні табличні інтеграли.
6. Перелічіть, які існують основні методи інтегрування?
7. В чому полягає суть методу інтегрування частинами? За допомогою якої формули можна обчислити інтеграл частинами?
8. Які особливості методу інтегрування за допомогою заміни змінної (підстановки)?
9. Сформулюйте означення дробово-раціональної функції.
10. За яких умов раціональний дріб правильний (неправильний)?
11. У випадку неправильного раціонального дробу як можна обчислити його невизначений інтеграл?
12. Коли використовують метод невизначених коефіцієнтів для інтегрування раціональних дробів? В чому його суть?
13. Який зв'язок між знаменником дробу та розкладом дробу на суму найпростіших?
14. Як здійснюють інтегрування тригонометричних та ірраціональних функцій?

# ТЕМА 15. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

***План***

1. *Задачі, які приводять до поняття визначеного інтеграла.*
2. *Означення визначеного інтеграла, його основні властивості. Формула Ньютона-Лейбніца для обчислення визначеного інтеграла.*
3. *Наближене обчислення визначених інтегралів.*
4. *Основні методи інтегрування.*
5. *Застосування інтегрального числення до обчислення площ фігур і об'ємів тіл обертання.*
6. *Застосування інтегрального числення для розв'язування завдань економічного змісту.*

*Основні терміни та поняття:* криволінійна трапеція; інтегральна сума; площа криволінійної трапеції; визначений інтеграл; верхня та нижня межі інтегрування; проміжок інтегрування; геометричний, фізичний, економічний зміст визначеного інтеграла; первісна; формула Ньютона-Лейбніца; наближені методи інтегрування: формули прямокутників, трапецій, Сімпсона; основні методи інтегрування (заміною змінних, частинами); площа фігури; об'єм тіла обертання; крива попиту та пропозиції; рівноважна ціна; надлишок споживання.

## 1. Задачі, які приводять до поняття визначеного інтеграла

До поняття визначеного інтеграла приводять багато задач геометрії, фізики, природознавства, економіки тощо. Розглянемо деякі з них.

**1) Обчислення площі криволінійної трапеції**.

Нехай на відрізку $\left[a,b\right]$ визначена неперервна функція $y=f(x)$, причому вважатимемо, що $f(x)\geq 0$ для довільного $x\in\left[a,b\right]$.

***Означення.*** *Фігуру, обмежену кривою* $y = f(x)$, *відрізком* $[a,b]$ *осі* $Ox$, *прямими* $x = a$, $x = b$, *називають* ***криволінійною трапецією*** (рис. 15.1).

Оскільки лінія $AB$ є довільною кривою, то для вирішення поставленої задачі (обчислити площу криволінійної трапеції) використаємо спочатку методи наближеного обчислення. Для цього розіб'ємо проміжок $[a,b]$ довільними точками $x_1.x_2,...,x_{n-1}$ на $n$ частин, враховуючи, що

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{k-1} < x_k < ... < x_n = b. \qquad (15.1)$$

Нехай довжина утворених частин

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},$$

де $k = 1,\ 2,\ ...,\ n$. Найбільшу з цих довжин надалі позначатимемо $\lambda$. Тобто

$$\lambda = \max|\Delta x_k|.$$

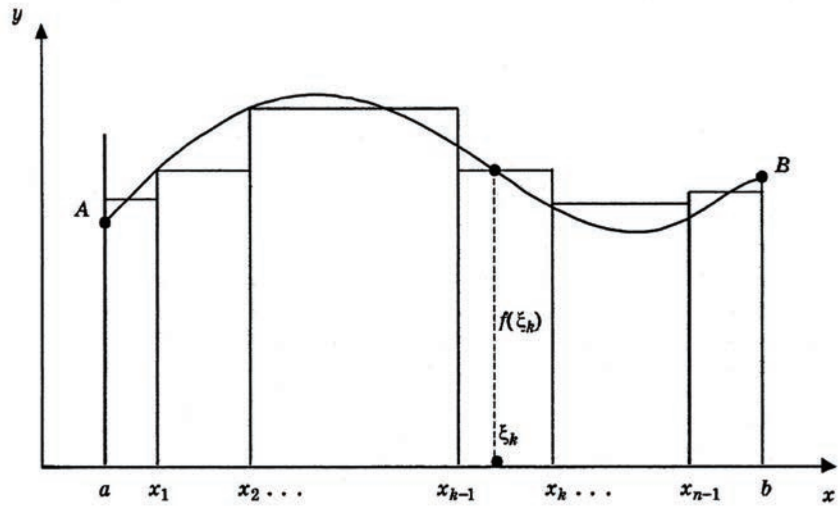



Рис. 15.1

Через кожну точку ділення проведемо пряму, паралельну осі ординат, до перетину з кривою $y = f(x)$.

Таким чином, поділимо дану криволінійну трапецію на $n$ прямокутників з основою $\Delta x_k$ та висотою $f(\varepsilon_k)$, де $\varepsilon_k$ – довільна точка з проміжку $\left[x_{k-1}, x_k\right]$. Площа кожного такого прямокутника – добуток довжини основи на висоту прямокутника, тобто обчислюватиметься за формулою

$$f(\varepsilon_k)\Delta x_k .$$

Тоді наближено площу криволінійної трапеції можна розглядати як суму площ усіх прямокутників:

$$S \approx f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta_2 + \ldots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta x_k . \quad (15.2)$$

Зрозуміло, що ця формула буде тим точніша, чим менше значення $\Delta x_k$. Щоб отримати точну формулу для обчислення площі криволінійної трапеції, потрібно перейти до границі за умови $\lambda \to 0$, тобто $\max\left|\Delta x_k\right| \to 0$. Тоді справедливим є твердження:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta x_k . \quad (15.3)$$

**2) Задача про роботу змінної сили.**

Нехай уздовж осі $Ox$ в напрямку від $x = a$ до $x = b$ на матеріальну точку діє сила $P = f(x)$, напрям якої збігається з напрямом руху. Потрібно визначити роботу *A*, яку виконує ця сила.

Як і в попередній задачі, поділимо пройдений шлях $b - a$ на $n$ частин точками $x_1 . x_2 ,\ldots, x_{n-1}$, що задовольняють умову (15.1). Припустимо, що вказані частини шляху досить малі і при пересуванні матеріальної точки у межах кожного проміжку сила $P$ зазнає незначних змін і дорівнює $P = f(\varepsilon_k)$, де $\varepsilon_k$ – довільна точка з $k$-ї ділянки шляху $\left[x_{k-1}, x_k\right]$. Згідно з такими припущеннями робота на $k$-й ділянці

$$\Delta A_k \approx \sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta x_k \ .$$

Провівши такі ж міркування на кожній окремій ділянці, дістанемо наближену величину роботи:

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta x_k \ .$$

Якщо $\lambda \to 0$ $(\lambda = \max|\Delta x_k|)$, то змінна сила $P$ на проміжку $\Delta x_k$ мало відрізняється від сталої. Тому обчислення дійсного значення роботи змінної сили зводиться до обчислення границі цієї суми при $\lambda \to 0$, тобто

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta x_k \ . \qquad (15.4)$$

**3) Задача про обсяг продукції.**

Нехай підприємство (фірма) виробляє продукцію з інтенсивністю (***продуктивністю праці***) $f = f(t)$. Знайдемо обсяг продукції $q$, виробленої за інтервал часу $[0;T]$.

Якщо інтенсивність виробництва продукції не змінюється $(f = f(t) = const)$, то обсяг продукції $q$, виробленої за інтервал часу $[0;T]$, обчислюється за формулою:

$$q = f \cdot T \ . \qquad (15.5)$$

У загальному випадку справедливе наближене значення обсягу продукції:

$$q \approx \sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta t_k \ , \qquad (15.6)$$

де $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ – довжини окремих відрізків поділу інтервалу $[0;T]$.

Якщо $\lambda = \max|\Delta t_k| \to 0$, то кожен із доданків суми стає більш точним, тому шуканий обсяг продукції (за умовою він існує) дорівнюватиме:

$$q = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta t_k \ . \qquad (15.7)$$

## 2. Означення визначеного інтеграла, його основні властивості. Формула Ньютона-Лейбніца для обчислення визначеного інтеграла

***Означення.*** *Суму типу (15.3), (15.4), (15.7) називають* ***інтегральною сумою*** *для функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, а границю цієї суми –* ***визначеним інтегралом*** *і позначають:*

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx \cdot \qquad (15.8)$$

Тоді: функція $f(x)$ називається **інтегровною на відрізку** $[a,b]$; числа $a$ та $b$ – відповідно **верхня та нижня межі інтегрування**; $f(x)$ – **підінтегральна функція**; $f(x)dx$ – **підінтегральний вираз**; відрізок $[a,b]$ – **проміжок інтегрування**; $x$ – **змінна інтегрування**.

Визначений інтеграл називають також *інтегралом Рімана*.

### *СТОРІНКА ІСТОРІЇ*

***Георг Фрідріх Бернхард Ріман (1826-1866)*** *– німецький математик, який лише за 10 років своєї наукової діяльності змінив відразу декілька розділів математики.*

*Народився в сім'ї бідного пастора, в якій був другою (з шести) дитиною. Школу зміг почати відвідувати лише в 14 років, хоча здібності до математики проявляв ще в дитинстві. Підкорившись бажанням батька, в 1846 році вступає до Гьотингенського університету для вивчення філософії та богослов'я. Проте через рік, прослухавши курс лекцій Гаусса, Ріман приймає рішення стати математиком та переходить на навчання до Берлінського університету. У 1851 році захищає дисертацію «Обґрунтування теорії функції комплексної змінної», де вперше вводить поняття, яке пізніше стало відомим як «ріманова поверхня». З 1854 року працює над розвитком нової, ріманової геометрії.*

*Публікує класичні праці з теорії абелевих функцій, аналітичної теорії диференціальних рівнянь, наполягає на формалізації поняття «інтеграл» та вводить своє визначення – інтеграл Рімана. Розвиває загальну теорію тригонометричних рядів, що не зводяться в ряд Фур'є.*

*Помер рано, в неповних 40 років, від туберкульозу.*

Розглянуті в першому питанні задачі дозволяють сформулювати зміст визначеного інтеграла.

***Геометричний зміст визначеного інтеграла.*** Якщо $f(x)$ – неперервна і невід’ємна функція, то $\int_a^b f(x)dx$ виражає площу криволінійної трапеції, обмеженої прямими $x = a$, $x = b$, віссю $Ox$ та функцією $f(x)$.

***Фізичний зміст визначеного інтеграла***. Визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ чисельно дорівнює роботі сили $f = f(x)$, що діє на точку вздовж проміжку $[a,b]$.

***Економічний зміст визначеного інтеграла***. Визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ чисельно дорівнює обсягу виробленої продукції підприємством (фірмою) з продуктивністю праці $f = f(t)$ за інтервал часу $[0;T]$.

Основною формулою інтегрального числення, яка встановлює зв'язок між визначеним інтегралом та первісною і використовується на практиці для обчислення визначених інтегралів, є так звана ***формула Ньютона-Лейбніца***, яку часто записують у вигляді:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (15.9)$$

Продемонструємо, як з допомогою формули (15.9) обчислити табличні інтеграли.

**Завдання 125.** Обчисліть безпосереднім інтегруванням:

а) $\int_1^3 x^2 dx$; б) $\int_3^2 x^3 dx$.

*Розв'язання*

Скористаємось таблицею основних інтегралів та знайдемо значення первісної функції $F(x)$, значення якої підставимо у формулу (15.10). Тоді:

а) $\int_1^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$;

б) $\int_3^2 x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_3^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{3^4}{4} = \frac{16-81}{4} = -\frac{65}{4} = -16\frac{1}{4}$.

**Відповідь:** а) $8\frac{2}{3}$; б) $-16\frac{1}{4}$.

Проаналізувавши наведені приклади безпосереднього інтегрування, можна побачити, що якщо $a = b$, то формула (15.9) набуде значення:

$$F(b) - F(a) = F(a) - F(a) = 0.$$

Або, якщо $a > b$, а отже, й $|F(a)| > |F(b)|$, то формулу (15.9) можна переписати так:

$$F(b) - F(a) = -F(a) + F(b) = -\big(F(a) - F(b)\big).$$

В даному випадку відповідно до виконаних перетворень початковий інтеграл дорівнюватиме новому, що розглядається на проміжку, де $a$ – верхня, $b$ – нижня межі інтегрування.

Сформулюємо кілька ***основних властивостей визначеного інтеграла***, які легко перевірити, скориставшись формулою (15.9):

1. $$\int_a^a f(x)dx = 0; \qquad (15.10)$$

2. $$\int_a^b cf(x)dx = \mathrm{c}\int_a^b f(x)dx,\ \mathrm{c} = const; \qquad (15.11)$$

3. $$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx; \qquad (15.12)$$

4. $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx; \qquad (15.13)$$

5. $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,\ \text{де } \mathrm{c} \in [a,b]. \qquad (15.14)$$

**Завдання 126.** Обчисліть визначений інтеграл $\int_0^4 (2x-5)dx$ за допомогою його основних властивостей.

*Розв'язання*

Перед обчисленням проаналізуємо даний інтеграл: підінтегральна функція – різниця двох членів, а тому можна спочатку скористатись формулою (15.12) та розписати визначений інтеграл на різницю двох інтегралів. Нові інтеграли містять сталі множники (2 і 5), які згідно з властивістю (15.11) можна винести за знак визначеного інтеграла. Скориставшись на даному етапі таблицею основних інтегралів і формулою Ньютона-Лейбніца, матимемо:

$$\int_0^4 (2x-5)dx = \int_0^4 2xdx - \int_0^4 5dx = 2\int_0^4 xdx - 5\int_0^4 dx = 2\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^4 - 5\cdot x\Big|_0^4 = 4^2 - 20 = 16 - 20 = -4.$$

**Відповідь:** -4.

## 3. Наближене обчислення визначених інтегралів

Для деяких неперервних підінтегральних функцій $f(x)$ не завжди можна знайти первісну, виражену через елементарні функції. Тобто неможливо й обчислити визначені інтеграли за формулою Ньютона-Лейбніца. Для таких випадків існують методи наближеного інтегрування, які дають змогу використовувати сучасну обчислювальну техніку. Суть таких методів полягає в тому, що графік підінтегральної функції $f(x)$ заміняється близькою до цього графіка лінією.

Так, на рисунку (15.2) графік $f(x)$ замінено ступінчастою ламаною.

Тоді для обчислення визначеного інтеграла складають інтегральну суму, що відповідає поділу проміжку $[a,b]$ на $n$ рівних частин і вибору точок $\varepsilon_k = x_k$:

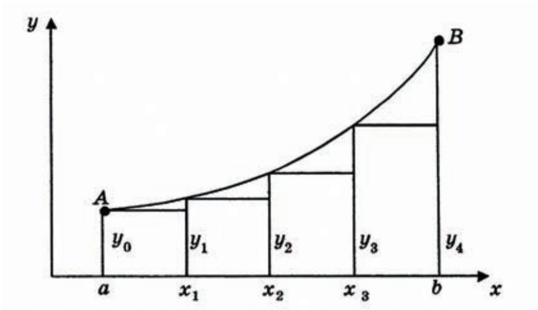



Рис. 15.2

$$\sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta x_k = \Delta x\left(y_1 + y_2 + ... + y_n\right).$$

Звідси визначений інтеграл можна обчислювати за так званою ***формулою прямокутників***:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(y_1 + y_2 + ... + y_n\right). \qquad (15.15)$$

Зрозуміло, що чим більше буде $n$ (кількість частин після поділу), тим меншим буде крок $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ і тим точніше значення визначеного інтеграла буде давати права частина записаного наближення.

Якщо ж після того, як проміжок $[a,b]$ поділено на $n$ рівних частин, у криву $AB$ вписати ламану (рис. 15.3), то дістанемо $n$ трапецій, сума площ яких наближено дорівнюватиме значенню інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$:

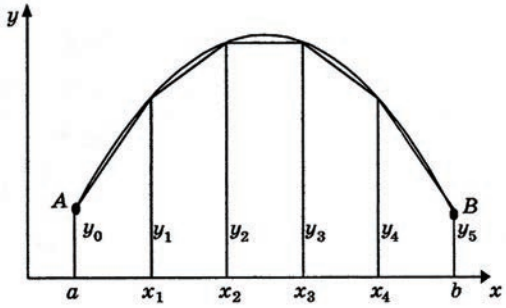



Рис. 15.3

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{y_0 - y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1 + y_2}{2}\Delta x + \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\Delta x,$$

або

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right). \qquad (15.16)$$

Формулу (15.16) називають ***формулою трапецій***.

Якщо проміжок інтегрування $[a,b]$ поділити на парну кількість рівних частин (тобто $2n$) і позначити $y_k = f_k(x)$, де $x_k = a + \Delta x \cdot k$ – точки поділу, $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n$, то визначений інтеграл можна обчислити за ***формулою Сімпсона***:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left(y_0 + y_{2n} + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}\right) + 4\left(y_1 + \ldots + y_{2n-1}\right)\right). \qquad (15.17)$$

**Завдання 127.** Дослідіть, який з методів наближеного обчислення визначеного інтеграла $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ дає результат, найближчий до його точного значення, що дорівнює одиниці.

*Розв'язання*

Для використання методів наближеного обчислення необхідно проміжок інтегрування $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ поділити на $n$ рівних частин. Нехай $n = 3$. Тоді за формулою:

1) *прямокутників* (15.15) матимемо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \approx \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{3}\left(y_1 + y_2 + y_3\right) = \frac{\pi}{6}\left(\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{2}\right) \approx 1{,}237\,;$$

2) *трапецій* (15.16) отримаємо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \approx \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{3}\left(\frac{y_0 + y_3}{2} + y_1 + y_2\right) = \frac{\pi}{6}\left(2 + \sqrt{3}\right) \approx 0{,}967\,;$$

3) Сімпсона (15.17) дістанемо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \approx \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{6 \cdot 3}\left(y_0 + y_4 + 2y_2 + 4\left(y_1 + y_3\right)\right) \approx 0{,}99951\,.$$

**Відповідь:** найточніше значення визначеного інтеграла $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ отримано за допомогою формули Сімпсона.

***<u>Зауваження.</u>*** Узагальнюючи результат розв'язання попереднього завдання, можна стверджувати, що формула Сімпсона дає більш точне значення визначеного інтеграла. Це пояснюється тим, що для її доведення використовують метод парабол, за яким на кожному відрізку $\left[x_{k-1}, x_k\right]$ три значення функції $f(x)$ входять до інтегральної суми.

Існують більш ефективні способи обчислення визначеного інтеграла.

## 4. Основні методи інтегрування

Формула Ньютона-Лейбніца показує, що для того, щоб обчислити визначений інтеграл, досить знайти первісну (використовуючи властивості та таблицю основних інтегралів) і підставити замість змінної верхню та нижню межі інтегрування.

---

### *СТОРІНКА ІСТОРІЇ*

*Багато написано з приводу того, кому належить пріоритет відкриття диференціального та інтегрального числення. Насправді, обидва вчені, Ісаак Ньютон та Готфрід Лейбніц, зробили його незалежно один від одного, ідучи різними шляхами. Але роботи Лейбніца було опубліковано раніше, хоча деякі поняття набагато раніше ввів Ньютон.*

***Ісаак Ньютон (1643-1727)** – видатний англійський вчений, який заклав основи сучасного природознавства, творець класичної фізики. Фізика була лише третім за значенням захопленням Ньютона після теології та алхімії. Ньютон написав більше творів, присвячених філософії та історії християнства, ніж фізиці. Але й вони зіграли винятково важливу роль в історії розвитку фізики.*

*Наукові праці Ньютона сприяли розвитку механіки, оптики, астрономії. Сформулював основні закони класичної механіки, відкрив закон всесвітнього тяжіння, дисперсію світла. З 1699 року був директором Королівського монетного двору, членом Паризької Академії Наук. На його честь названо одиницю сили в Міжнародній системі одиниць. Серед математичних відкриттів – основні поняття та алгоритм числення нескінченно малих (як первісне поняття використовує «флюксії», тобто швидкості), що поклало основу для розвитку диференціального та інтегрального числення.*

*Вагомий внесок Ньютона у розвиток науки узагальнюють слова, викарбувані на його могилі: «Тут спочиває сер Ісаак Ньютон, дворянин, який майже божественним розумом першим довів з факелом математики рух планет, шляхи комет і припливи океанів. Він досліджував різноманітність світлових променів і різні властивості кольорів, які при цьому з'являються, про що раніше ніхто не підозрював… Нехай смертні радіють, що існувала така прикраса роду людського».*

Проте не всі визначені інтеграли можна обчислити безпосередньо. Як і у випадку невизначеного інтеграла, існують спеціальні методи, що дозволяють обчислювати визначені інтеграли, які відрізняються від табличних. Найпоширеніші з них – метод інтегрування частинами та заміною змінних. Розглянемо їх детальніше та дослідимо особливості, побудувавши порівняльні таблиці (таблиці 15.1, 15.2).

Таблиця 15.1

**Порівняльна таблиця особливостей інтегрування частинами у випадках невизначеного та визначеного інтегралів**

| Метод інтегрування | | Невизначений інтеграл | Визначений інтеграл |
|---|---|---|---|
| **Частинами** | Формула | $\int U \cdot dV = U \cdot V - \int V \cdot dU$ | $\int\limits_a^b UdV = UV\Big\vert_a^b - \int\limits_a^b VdU$ (15.18) |
| | Зразок розв’язання | $\int \ln x dx = \begin{vmatrix} U = \ln x & dU = \dfrac{dx}{x} \\ dV = dx & V = x \end{vmatrix} =$ $= x \cdot \ln x - \int x \cdot \dfrac{dx}{x} = x \cdot \ln x -$ $- \int dx = x \ln x - x + C$ | $\int\limits_1^e \ln x dx = \begin{vmatrix} U = \ln x & dU = \dfrac{dx}{x} \\ dV = dx & V = x \end{vmatrix} =$ $= x \ln x\Big\vert_1^e - \int\limits_1^e x \cdot \dfrac{dx}{x} = x \ln x\Big\vert_1^e -$ $- \int\limits_1^e dx = x \ln x\Big\vert_1^e - x\Big\vert_1^e = (x \ln x - x)\Big\vert_1^e =$ $= (e \cdot \ln e - e) - (1 \cdot \ln 1 - 1) = (e \cdot 1 - e) -$ $- (1 \cdot 0 - 1) = 1$. |
| **Висновок** | | Обчислення визначеного інтеграла частинами проводимо поділом на $U$, $dV$ з використанням міркувань, аналогічних для випадку невизначеного інтеграла. Подальші дії ґрунтуються на використанні формули Ньютона-Лейбніца. Кінцевим результатом обчислення є не вираз, залежний від $x$ і $C = const$, а конкретне числове значення. | |

Таблиця 15.2

**Порівняльна таблиця особливостей інтегрування методом заміни змінної (підстановки) у випадках невизначеного та визначеного інтегралів**

<table>
<tr><th colspan="2">Метод інтегрування</th><th>Невизначений інтеграл</th><th>Визначений інтеграл</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Заміною змінних (підстановки)</td><td>Формула</td><td>$\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt$,<br>де $x = g(t)$</td><td>$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$ (15.19)<br>де<br>$x = g(t)$, $a = g(\alpha)$,<br>$b = g(\beta)$.</td></tr>
<tr><td>Зразок розв’язан-ня</td><td>$\int \cos x \cdot \sin^2 xdx =$<br>$= \left| \begin{matrix} \sin x = t, \\ (\sin x)' dx = (t)' dt, \\ \cos xdx = dt \end{matrix} \right| = \int t^2 dt =$<br>$= \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$</td><td>$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sin^2 xdx =$<br>$= \left| \begin{matrix} \sin x = t, \\ (\sin x)' dx = (t)' dt, \\ \cos xdx = dt, \\ \text{якщо} \quad x = 0, \quad \text{то} \quad t = \sin 0 = 0, \\ \text{якщо} \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{то} \quad t = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \end{matrix} \right| =$<br>$= \int\limits_0^1 t^2 dt = \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Висновок</td><td colspan="2">Обчислення невизначеного інтеграла передбачає введення нової змінної, що спрощує процес розв’язування. Але кінцевий результат вимагає повернення до початкової змінної та залежить від $C = const$.<br>Під час обчислення визначеного інтеграла, крім введення нової змінної, необхідно ще й здійснити перехід до нових меж інтегрування (надати початковій змінній значення меж інтегрування з умови завдання та підставити їх у вираз, якому дорівнює нова змінна $t$), а тому кінцевий результат отримується одразу після використання формули Ньютона-Лейбніца. І це – число.</td></tr>
</table>

## 5. Застосування інтегрального числення до обчислення площ фігур і об'ємів тіл обертання

### а) Обчислення площ фігур

Одним з найбільш важливих застосувань визначеного інтеграла є обчислення площ областей.

Розглянемо випадки розміщення області відносно декартової системи координат.

**а)** Якщо область обмежена графіком функції $y = f(x)$, віссю $Ox$ $(y = 0)$, прямими $x = a$, $x = b$ і розміщена у I-II координатних чвертях (рис. 15.4), то її площа обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b f(x)dx . \qquad (15.20)$$

Якщо область розміщена у III-IV координатних чвертях (рис. 15.5), то

$$S = -\int_a^b f(x)dx . \qquad (15.21)$$

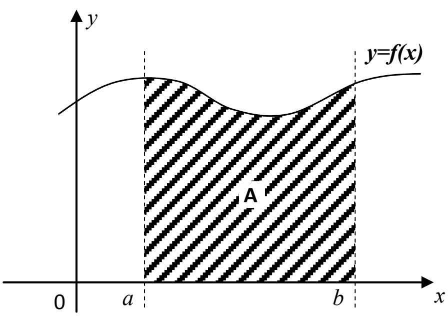



Рис. 15.4

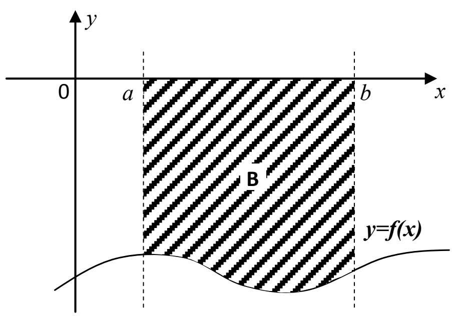



Рис. 15.5

**Завдання 128.** Обчисліть площу фігури, обмежену параболою $y = x^2$, прямими $x = -1$, $x = 2$ та віссю абсцис.

*Розв'язання*

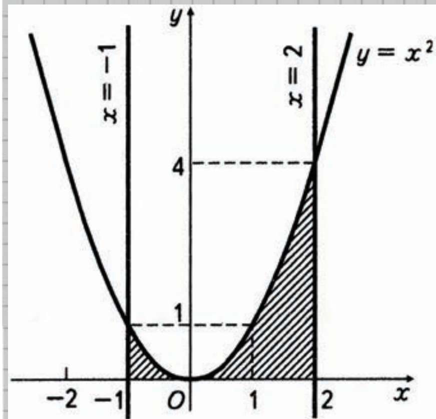



Рис. 15.6

Зобразимо фігуру, площу якої потрібно обчислити. Для цього побудуємо графік функції $y = x^2$ та прямі $x = -1$, $x = 2$. Заштрихуємо фігуру, площу якої обчислюємо (рис. 15.6).

Оскільки область розміщена у I-II координатних чвертях, то за (15.20) маємо:

$$S = \int_a^b f(x)dx .$$

Тобто $$S = \int_{-1}^{2} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = \frac{9}{3} = 3 \cdot$$

***Зауваження.*** Нагадаємо, що площа вимірюється в квадратних одиницях.

**Відповідь:** 3 кв.од.

**б)** Розглянемо загальний випадок площі, обмеженої графіками функцій $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ (причому $f_2(x) \geq f_1(x)$) і прямими $x = a$, $x = b$ (рис. 15.7). Тоді:

$$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx. \qquad (15.22)$$

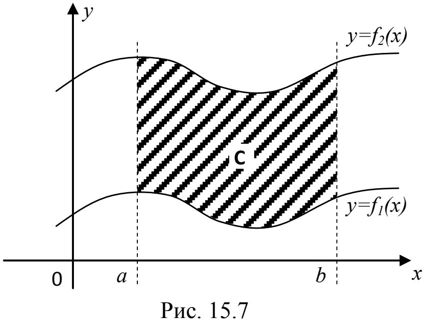



Рис. 15.7

**Завдання 129.** Обчисліть площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = 2x - x^2$; $y = -x$.

*Розв'язання*

Для побудови графіка даної квадратичної функції можна використати два способи:

1) звести рівняння параболи $y = 2x - x^2$ методом виділення повних квадратів та побудувати її графік елементарними перетвореннями;

2) побудувати параболу, знайшовши координати її вершини $(x_0; y_0)$ та точки перетину з осями координат.

***I спосіб***

Перепишемо рівняння параболи у вигляді:

$$y = -x^2 + 2x = -\left(x^2 - 2x\right).$$

Тоді неважко здогадатися, що для того, щоб доповнити до повного квадрата вираз у дужках, необхідно:

$$y = -\left(x^2 - 2x\right) = -\left(x^2 - 2x + 1 - 1\right) = -\left(x^2 - 2x + 1\right) + 1 = -\left(x - 1\right)^2 + 1.$$

Отже, графіком функції $y = 2x - x^2$ є парабола, вітки якої спрямовані вниз, паралельно перенесена вправо на 1 одиницю по осі абсцис та піднята вгору на 1 одиницю по осі ординат.

***II спосіб***

Вершина параболи $y = 2x - x^2$ – точка з координатами $(x_0; y_0)$, де

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-2} = 1,$$

$$y_0 = 2 \cdot x_0 - x_0^{\ 2} = 2 \cdot 1 - 1 = 1.$$

Вітки параболи напрямлені вниз тому, що $a = -1$.

Точки перетину з віссю $Ox$ $(y = 0)$:

$$0 = 2x - x^2;$$

$$x(2-x)=0$$

$$x=0 \quad \text{або} \quad 2-x=0;$$

$$x=2.$$

Точка перетину з віссю $Oy$ $(x=0)$: $y=2\cdot 0-0^2=0$.

Функція $y=-x$ – лінійна, графіком є пряма, що проходить через початок координат та є бісектрисою II та IV координатних кутів.

Отриману область зображено на рисунку 15.8.

Для обчислення площі фігури необхідно встановити межі інтегрування.

***<u>Зауваження.</u>*** Не рекомендуємо знаходити межі інтегрування з допомогою графіка функції через можливу неточність побудови.

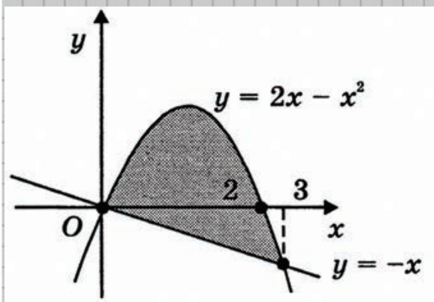



Рис. 15.8

Щоб встановити межі інтегрування, потрібно знайти абсциси точок перетину параболи $y=2x-x^2$ та прямої $y=-x$.

Тобто необхідно розв'язати систему:

$$\begin{cases} y=2x-x^2 \\ y=-x \end{cases}.$$

Оскільки ліві частини рівнянь рівні, то рівними повинні бути і їх праві частини. Отже,

$$2x-x^2=-x.$$

Тоді:

$$2x-x^2+x=0;$$

$$-x^2+3x=0;$$

$$-x(x-3)=0;$$

$$x=0 \quad \text{або} \quad x=3.$$

Отже, площу даної фігури обчислимо, скориставшись формулою (15.22):

$$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx\,,$$

де $f_1(x) = -x$ , $f_2(x) = 2x - x^2$, межі інтегрування – $x = 0$ та $x = 3$ . Таким чином,

$$S = \int_0^3 \left(2x - x^2 - (-x)\right)dx = \int_0^3 \left(3x - x^2\right)dx = \left(3 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{81-54}{6} = \frac{27}{6} = 4{,}5\,.$$

**Відповідь:** 4,5 кв.од.

### б) Обчислення об'ємів тіл обертання

Розглянемо криволінійну трапецію, обмежену лініями $y = f(x) \geq 0,\quad y = 0,\quad x = a,\quad x = b$ і яка обертається навколо осі *Ox*. Як результат – тіло обертання, об'єм якого обчислюється за формулою:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \qquad (15.23)$$

Розглянемо детальніше на конкретному прикладі.

**Завдання 130.** Обчисліть об'єм тіла, утвореного прямими $y = x$, $y = 0$ та $x = 3$ при їх обертанні навколо осі абсцис.

*Розв'язання*

Тіло, утворене обертанням навколо осі абсцис прямих $y = x$, $y = 0$ та $x = 3$, зображене на рисунку 15.9.

За формулою (15.23):

$$V = \pi \int_0^3 x^2 dx = \pi \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^3 = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^3 = 9\pi \text{ куб.од.}$$

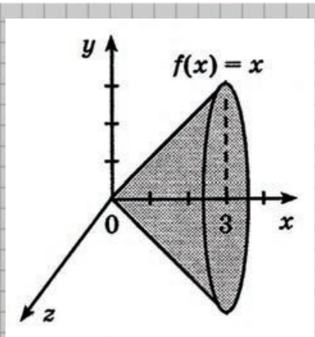


Рис. 15.9

**Відповідь:** $9\pi$ куб.од.

## 6. Застосування інтегрального числення для розв’язування завдань економічного змісту

При введені поняття визначеного інтеграла нами було сформульовано його економічний зміст, що виражає обсяг виробленої продукції при відомій функції продуктивності праці. Наведемо ще деякі приклади використання визначеного інтеграла в економіці.

Так, визначений інтеграл застосовують для обчислення сумарних економічних ефектів. Розглянемо конкретний приклад.

**Завдання 131.** Граничний дохід фірми $MR$ за реалізацію продукції сталий і для конкретності дорівнює 10 грн. Тобто

$$MR = f(x) = 10 \text{ грн.},$$

де $x$ – кількість проданих одиниць продукції. Дослідіть, який дохід отримає фірма від продажу 1500 одиниць продукції.

*Розв’язання*

Використовуючи елементарні міркування, отримаємо, що дохід фірми

$$R = 10 \cdot 1500 = 15000 \text{ грн.}$$

Продемонструємо, як можна обчислити шукану величину з допомогою визначеного інтеграла. Для цього пригадаємо означення граничного доходу (дохід, що одержується від продажу додаткової одиниці продукції) та первісної функції. Тоді

$$R = \int_0^{1500} 10dx = 10x \Big|_0^{1500} = 10 \cdot 1500 = 15000 \text{ } грн.$$

Графічно розв’язок завдання ілюструє рисунок 15.10.

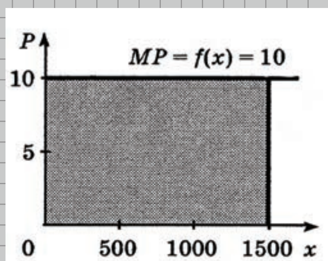


Рис. 15.10

**Відповідь:** 15000 грн.

***Зауваження.*** Обчислення граничного доходу через визначений інтеграл є більш загальним, оскільки граничний ефект, як правило, залежить від кількості проданих одиниць продукції $x$.

Визначений інтеграл використовується і для обчислення надлишку споживання.

***Означення. Надлишок споживання*** $S_H$ *– це різниця між можливими й реальними витратами споживання в умовах ринку.*

Геометричну інтерпретацію даного поняття подано на рисунку 15.11.

Розглянемо криву попиту деякого товару у вигляді графіка функції $p = f(q)$, де $p$ – ціна одиниці товару, $q$ – обсяг цього товару та позначимо через $p_0$ рівноважну ціну, а через $q_0$ – обсяг товару, який реалізується з ціною $p_0$. Точка рівноваги – це деяка точка $A$ перетину кривих попиту та пропозиції. Тоді згідно з означенням надлишок споживання можна обчислити за формулою:

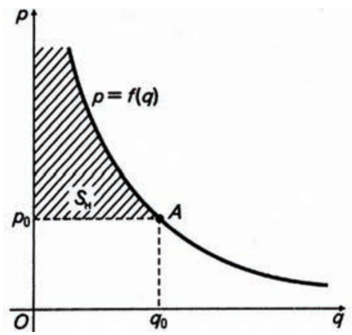


Рис. 15.11

$$S_H = \int_0^q f(q)dq - p_0 q_0 . \qquad (15.24)$$

**Завдання 132.** Дослідіть величину надлишку споживача, якщо крива попиту визначається функцією $p = f(q) = 29 - 3q^2$, а рівноважний обсяг товару $q_0 = 2$.

*Розв'язання*

Для обчислення шуканої величини скористаємось формулою (15.24), попередньо обчисливши значення рівноважної ціни $p_0$:

$$p_0 = f(q_0) = f(2) = 29 - 3 \cdot 2^2 = 17.$$

Тоді

$$S_H = \int_0^q f(q)dq - p_0 q_0 = \int_0^2 \left(29 - 3q^2\right)dq - 17 \cdot 2 = \left(29q - q^3\right)\Big|_0^2 - 34 = 29 \cdot 2 - 8 - 34 = 16 \cdot$$

**Відповідь:** 16.

**У результаті вивчення теми необхідно:**

| *знати* | *вміти* |
|---|---|
| - геометричне застосування визначеного інтеграла, його основні властивості;<br>- зв'язок між визначеним та невизначеним інтегралом;<br>- методи обчислення визначених інтегралів;<br>- формули для наближеного обчислення визначених інтегралів. | - обчислювати визначені інтеграли за формулою Ньютона-Лейбніца, заміною змінних, за формулою інтегрування частинами;<br>- обчислювати площі криволінійних фігур і об'єми тіл обертання;<br>- наближено обчислювати визначені інтеграли;<br>- розв'язувати задачі економічного спрямування з використанням інтегрального числення та формулювати отримані результати мовою економіки. |

## Питання для самоконтролю

1. Перелічіть задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла.
2. Сформулюйте означення інтегральної суми деякої функції на заданому проміжку.
3. Сформулюйте означення визначеного інтеграла та запишіть його.
4. У чому полягають геометрична, фізична та економічна суть визначеного інтеграла?
5. Запишіть основні властивості визначеного інтеграла.
6. Яка формула використовується для обчислення визначених інтегралів? Запишіть її.
7. Поясніть суть відомих вам наближених методів інтегрування.
8. У чому полягає відмінність при використанні методу інтегрування частинами для невизначених та визначених інтегралів?
9. Запишіть формулу для інтегрування частинами.
10. Які особливості обчислення визначеного інтеграла методом заміни змінної (підстановки)?
11. Що таке криволінійна трапеція?
12. Як обчислити площу фігури за допомогою визначеного інтеграла? Чи залежить вибір формули площі від розміщення фігури на координатній площині?
13. Як обчислити об’єм тіла обертання?
14. Що таке надлишок споживання та яка формула використовується для його обчислення?

# ТЕМА 16. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

***План***

1. *Математичні моделі ситуацій та процесів, які приводять до диференціальних рівнянь.*
2. *Основні поняття та означення. Класифікація диференціальних рівнянь.*
3. *Найпростіші типи диференціальних рівнянь першого порядку (рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними; однорідні).*
4. *Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.*

<u>*Основні терміни та поняття:*</u> диференціальне рівняння; математична модель; початковий капітал; функція капіталу; приріст функції доходу; приріст функції повних витрат; рівняння нагромадження капіталу; рух фондів; порядок рівняння; звичайне диференціальне рівняння першого порядку; розв'язок (інтеграл); загальний та частковий розв'язок; інтегральна крива; початкова умова; задача Коші; рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними; однорідні та лінійні рівняння; рівняння зі сталими коефіцієнтами.

## <u>1. Математичні моделі ситуацій та процесів, які приводять до диференціальних рівнянь</u>

Математичний опис процесів природи, виробництва часто приводять до рівнянь, що пов'язують незалежні змінні, шукану функцію і похідні або диференціали цієї функції. Такі рівняння називаються *диференціальними*.

Мовою диференціальних рівнянь записані закони електромагнітних явищ (рівняння Максвелла), основне рівняння квантової механіки (рівняння Шредінгера), рівняння руху в механіці тощо.

Розглянемо деякі економічні задачі, що приводять до поняття диференціального рівняння.

**а) Задача про нагромадження капіталу**

Нехай підприємство (фірма) з початковим капіталом $K_0$ розпочало діяльність, мета якої – нагромадження капіталу. Функція капіталу $K = K(t)$ із часом змінюється. Опишемо динаміку такого процесу.

Введемо позначення: $K(t)$ – капітал підприємства (фірми) в момент часу $t$; $K(t+\Delta t)$ – капітал фірми в момент часу $t+\Delta t$. Тоді різниця

$$\Delta K = K(t+\Delta t) - K(t)$$

дає приріст капіталу за інтервал часу $\Delta t$. Він складається з доходу за інтервал часу $\Delta t$ та повних витрат виробництва. В загальному даний приріст можна визначити за формулою:

$$\Delta K = \Delta R - \Delta C, \tag{16.1}$$

де $\Delta R = R(t+\Delta t) - R(t)$ – приріст функції доходу;
$\Delta C = C(t+\Delta t) - C(t)$ – приріст функції повних витрат підприємства.

Формула (16.1) і є ***рівнянням нагромадження капіталу***. Для того, щоб його розв'язати, потрібно знайти функцію доходу $R = R(t)$ і функцію повних витрат $C = C(t)$ фірми. *Ця проблема є однією з найважливіших у теорії моделювання економічних процесів*.

Нехай розглядається випадок, коли прирости функцій $\Delta R$ та $\Delta C$ мають вигляд:

$$\Delta R = \alpha \cdot K(t)\Delta t, \qquad \Delta C = \beta \cdot K(t)\Delta t.$$

Додатні коефіцієнти $\alpha$ і $\beta$ характеризують інтенсивність зміни доходу й повних витрат фірми відповідно. Тоді формулу (16.1) запишемо у вигляді:

$$\Delta K = \lambda K(t)\Delta t, \tag{16.2}$$

де $\lambda = \alpha - \beta$.

Поділивши формулу (16.2) на $\Delta t \neq 0$ та перейшовши до границі при $\Delta t \to 0$, дістанемо диференціальне рівняння:

$$\frac{dK}{dt} = \lambda K(t), \text{ або } K'(t) = \lambda K(t). \tag{16.3}$$

**б) Задача про рух фондів**

Позначимо через $K = K(t)$ обсяг фондів (у натуральній або вартісній формі) у момент часу $t$. Під фондами розуміють обладнання, прилади, приміщення тощо. Все це може ламатися, спрацьовуватися, старіти тощо. Про цей процес кажуть, що фонди вибувають. Швидкість вибуття фондів виражається через коефіцієнт вибуття. Наприклад, якщо за 10 років фонди повністю оновлюються, то коефіцієнт вибуття дорівнює 0,1.

Позначимо коефіцієнт вибуття через $\mu$. Отже, вибуття веде до зменшення фондів за рік на величину $\mu \cdot K(t)$, а за інтервал часу $\Delta t$ на величину $\mu \cdot K(t)\Delta t$ (вважається, що вибуття фондів рівномірне).

Натомість інвестиції – вкладання грошей – ведуть до збільшення фондів. Нехай інвестиції в розмірі $I$ ($I = const$) за рік дадуть збільшення фондів на величину $\rho \cdot I$ (можна було б вважати, що $\rho = 1$, але частина інвестицій йде на заробітну плату проектувальникам, будівельникам, тобто не прямим збільшенням фондів). Тоді за час $\Delta t$ інвестиції в разі їх рівномірного вкладання дадуть збільшення фондів на величину $\rho \cdot I \cdot \Delta t$.

Розглянемо довільний момент часу $t$ і його приріст $\Delta t$. Тоді зміна фондів за час $\Delta t$ становитиме:

$$K(t+\Delta t) = K(t) - \mu \cdot K(t)\Delta t + \rho \cdot I \cdot \Delta t\,. \qquad (16.4)$$

А при $\Delta t \to 0$ дістанемо диференціальне рівняння:

$$K'(t) = \mu \cdot K(t) + \rho \cdot I\,. \qquad (16.5)$$

**в) Задача про рекламу**

Нехай торговельними фірмами реалізується продукція, про яку в момент часу $t$ знають лише $x$ покупців із числа потенційних $n$. Після оголошення реклами швидкість зміни кількості покупців, яким відомо про продукцію, пропорційна як кількості покупців, що знають про товар, так і кількості покупців, котрим про нього нічого невідомо.

Визначимо закон зміни в часі кількості покупців $x$, які знають про продукцію, якщо в початковий момент часу $(t=0)$ про неї дізналися $\frac{n}{\gamma}$ чоловік (час відраховується від моменту оголошення реклами), $\gamma$ – задане число.

Оскільки швидкість зміни кількості покупців, які знають про продукцію, виражається похідною $x'(t)$, то дістанемо диференціальне рівняння:

$$x'(t) = kx(n-x)\,, \qquad (16.6)$$

де $x$ – кількість покупців, які знають про продукцію; $n-x$ – кількість тих, що не знають про неї в момент часу $t$; $k$ – коефіцієнт пропорційності.

## 2. Основні поняття та означення. Класифікація диференціальних рівнянь

Переважна більшість процесів техніки, управління, економіки тощо, які розгортаються в часі, задовольняють диференційними або різницевими рівняннями (залежно від того, який це процес – неперервний чи дискретний).

***Означення. Диференціальним*** *називається рівняння, що пов'язує незалежну змінну, її функцію та похідні різних порядків цієї функції.*

Найвищий порядок похідної цієї функції називається ***порядком рівняння.*** Так, ***диференціальне рівняння першого порядку*** може бути записане у формі:

$$F\big(x, y(x), y'(x)\big) = 0\,. \tag{16.7}$$

***Означення.*** *Рівняння, які залежать тільки від одного аргументу, називаються* ***звичайними диференціальними рівняннями****.*

Загальним прикладом звичайного диференціального рівняння є рівняння (16.7); рівняння $y' - xy + \sin x = 0$ – звичайне диференціальне першого порядку; рівняння $y''' - 4x^2 y^4 + e^x = 0$ – звичайне диференціальне третього порядку; $(y')^3 - y'' \cos x = 0$ – диференціальне рівняння другого порядку тощо.

***Зауваження.*** Варто зазначити, що у деяких випадках рівняння (16.7) може не містити змінні $x$ або $y$, але похідна $y'$ обов'язково повинна бути – без похідної диференціальне рівняння вироджується у звичайне.

Крім звичайних диференціальних рівнянь, існують *диференціальні рівняння в частинних похідних*: шукана функція залежить від кількох аргументів. Найпростіше диференціальне рівняння з частинними похідних першого порядку з двома змінними в загальному випадку записується так:

$$F\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right) = 0\,. \tag{16.8}$$

Обмежимося розглядом лише звичайних диференціальних рівнянь.

***Означення.*** ***Розв'язком (інтегралом)*** *звичайного диференціального рівняння першого порядку називається така функція* $\varphi(x)$, *яка при підстановці в дане рівняння перетворює його у тотожність, тобто*

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0. \tag{16.9}$$

***Означення.*** *Графік розв'язку диференціального рівняння називають* ***інтегральною кривою.***

Процес знаходження розв'язків диференціального рівняння називається *інтегруванням даного рівняння*.

Розв'язки звичайного диференціального рівняння (16.7) поділяють на *загальні* (які містять довільну константу *C*) та *частинні (часткові)*, у яких довільна стала *C* набуває конкретного значення.

***Означення.*** ***Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку*** *називається така функція двох змінних* $y = \varphi(x, C)$, *яка залежить від довільної сталої C і задовольняє умовам:*

*1) яка б не була довільна стала C, функція* $\varphi(x, C)$ *задовольняє диференціальне рівняння;*

*2) завжди знайдеться таке значення* $C = C_0$, *що функція* $\varphi(x, C_0)$ *задовольняє* ***початковій умові***

$$y(x_0) = y_0. \tag{16.10}$$

Задачу знаходження розв'язку рівняння, який задовольняє початкові умови, називають *задачею Коші*.

***Означення. Частковим (частинним) розв'язком*** *диференціального рівняння називають функцію* $y=\varphi(x,C_0)$, *яка одержується із загальної* $y=\varphi(x,C)$ *при певному значенні довільної сталої* $C=C_0$.

## 3. Найпростіші типи диференціальних рівнянь першого порядку

Розглянемо найпростіші типи диференціальних рівнянь першого порядку та способи їх розв'язання.

### а) Рівняння з відокремленими змінними

***Означення. Диференціальним рівнянням з відокремленими змінними*** *називається рівняння виду:*

$$M(x)dx+N(y)dy=0. \tag{16.11}$$

Тобто це рівняння, де один доданок залежить лише від змінної $x$, а інший – від змінної $y$. Щоб знайти розв'язок такого рівняння, необхідно проінтегрувати обидві його частини. Тоді загальний розв'язок (інтеграл) рівняння (16.11) набуде вигляду:

$$\int M(x)dx+\int N(y)dx=C, \tag{16.12}$$

де $C=const$.

**Завдання 133.** Запишіть загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку $xdx+ydy=0$ та дослідіть, який вигляд матиме інтегральна крива даного рівняння.

*Розв'язання*

Рівняння, що пропонується умовою завдання – це рівняння з уже відокремленими змінними. Для його розв'язання використаємо формулу (16.12), згідно з якою:

$$\int xdx + \int ydy = C.$$

Враховуючи, що $C = const$, а тому й $\frac{C}{2} = const$, матимемо:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{C}{2}, \qquad \text{або} \qquad x^2 + y^2 = C.$$

Отриманий розв'язок є рівнянням кола радіуса $r = \sqrt{C}$. Оскільки $C$ – довільна стала, то і графіком буде не одне, а безліч кіл. Кажуть, що розв'язком рівняння $xdx + ydy = 0$ є сім'я кривих (у нас – концентричні кола), загальне рівняння яких $x^2 + y^2 = C$.

**Відповідь:** $x^2 + y^2 = C$.

### б) Рівняння з відокремлюваними змінними

***Означення. Диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними*** *(або зі змінними, що відокремлюються) називається рівняння виду:*

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0. \qquad (16.13)$$

Як бачимо, у рівнянні (16.13), на відміну від (16.11), кожен доданок залежить не від однієї, а від двох змінних. Кажуть, що для розв'язання даного рівняння змінні необхідно відокремити, тобто рівняння (16.13) треба звести до вже відомого рівняння з відокремленими змінними.

Для цього виконаємо ділення обох частин рівняння (16.13) на множник $N_1(y) \cdot M_2(x)$. Тобто:

$$\frac{M_1(x) \cdot N_1(y)}{N_1(y) \cdot M_2(x)}dx + \frac{M_2(x) \cdot N_2(y)}{N_1(y) \cdot M_2(x)}dy = 0.$$

Після скорочення рівняння перетвориться у рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} = 0 . \qquad (16.14)$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (16.13) можна записати у вигляді:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_1(y)}{N_2(y)}dy = C . \qquad (16.15)$$

**Завдання 134.** Розв'яжіть диференціальне рівняння $\sqrt{y^2+1}\,dx - xydy = 0$ .

*Розв'язання*

Проаналізувавши умову завдання, бачимо, що це – рівняння зі змінними, які треба відокремити, адже і в першому, і в другому доданках лівої частини міститься $x$ та $y$ . Зведемо дане рівняння до виду (16.14), поділивши обидві частини на деякий вираз. Щоб встановити вигляд множника, на який потрібно вираз ділити, скористаємось умовою завдання.

Зрозуміло, що для того, щоб виконати інтегрування за формулою (16.15), перший доданок повинен залежати від змінної $x$ (бо є $dx$), а другий – від $y$ (бо є $dy$). Тобто перший доданок потрібно скоротити на вираз $\sqrt{y^2+1}$ , а другий – на $x$ . Спільним для обох додатків і буде множник $\sqrt{y^2+1}\cdot x$ .

Тоді дане диференціальне рівняння можна переписати:

$$\sqrt{y^2+1}dx = xydy , \qquad \text{або} \qquad \frac{dx}{x} = \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} .$$

Проінтегрувавши обидві частини даної рівності, матимемо:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} ;$$

$$\ln|x| = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(y^2+1\right)}{\sqrt{y^2+1}};$$

$$\ln|x| = \sqrt{y^2+1} + C.$$

**Відповідь:** $\ln|x| = \sqrt{y^2+1} + C$.

**Завдання 135.** Знайдіть частковий розв'язок диференціального рівняння $xdy = ydx$, який задовольняє початкову умову $y(1) = 1$.

*Розв'язання*

Спочатку знайдемо загальний розв'язок даного рівняння, попередньо відокремивши змінні:

$$xdy = ydx;$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|c|;$$

$$\ln|y| = \ln|xc|;$$

$$y = xc.$$

Отримана рівність і є загальним розв'язком нашого рівняння. Щоб знайти його частинний розв'язок, потрібно використати початкову умову $y(1) = 1$ (підставити значення змінних $x_0$ та $y_0$ у загальний розв'язок замість $x$ та $y$) і знайти конкретне значення довільної сталої $C$. Оскільки $y(1) = 1$, тобто $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, то

$$1 = 1 \cdot C \quad \text{та} \quad C = 1.$$

Тоді частковий розв'язок набуде вигляду: $y = x$.

**Відповідь:** $y = x$.

### в) Однорідні рівняння

***Означення.*** *Рівняння виду* $y' + p(x)y = f(x)$ *називається* ***неоднорідним****, якщо* $f(x)$ *тотожно не дорівнює нулю, й* ***однорідним****, якщо* $f(x) \equiv 0$.

Тобто однорідним буде рівняння:

$$y' + p(x)y = 0. \tag{16.16}$$

Існує декілька способів розв'язання рівняння (16.16). Найпростіший з них – метод, запропонований швейцарським математиком Йоганном Бернуллі. Згідно з ним однорідне рівняння за допомогою підстановки

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) \tag{16.17}$$

зводять до рівняння з відокремленими змінними.

**Завдання 136.** Розв'яжіть рівняння $y' + 4y = e^x$.

*Розв'язання*

Скористаємось підстановкою $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ та знайдемо значення похідної $y'(x)$, що входить до умови завдання. За правилом диференціювання добутку двох функцій маємо:

$$y'(x) = (u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x), \quad \text{або}$$
$$y' = u' \cdot v + v' \cdot u.$$

Отже, рівняння набуде вигляду:

$$u' \cdot v + v' \cdot u + 4uv = e^x. \tag{16.18}$$

Нехай $v' + 4v = 0$. Тоді

$$\frac{dv}{v} = -4dx; \quad \int \frac{dv}{v} = -4\int dx;$$

$$\ln v = -4x + C, \qquad \text{тобто} \qquad v(x) = e^{-4x}.$$

Підставивши знайдене значення $v(x)$ у рівняння (16.18) та проінтегрувавши отриманий вираз, матимемо:

$$u(x) = \frac{1}{5}e^{5x} + C.$$

Тоді загальним розв’язком однорідного рівняння буде функція:

$$y(x) = u(x)\cdot v(x) = e^{-4x}\left(\frac{1}{5}e^{5x} + C\right) = \frac{1}{5}e^{x} + C\cdot e^{-4x}.$$

**Відповідь:** $y(x) = \dfrac{1}{5}e^{x} + C\cdot e^{-4x}$.

## 4. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

***Означення.*** *Рівняння виду* $y' = P(x)y + Q(x)$ *називається* ***лінійним*** *відносно шуканої функції та її похідної.*

Якщо $Q(x) = 0$, то рівняння називається лінійним однорідним і набуває вигляду:

$$y' = P(x)y. \qquad (16.19)$$

Однорідні рівняння типу (16.16), тобто $y' + p(x)y = 0$, в яких функція $p(x)$ – стала, називають ***рівнянням зі сталими коефіцієнтами***. Загальний розв’язок таких рівнянь шукатимемо у вигляді $u(x) = Ce^{\lambda x}$.

Після підстановки в рівняння (16.16) матимемо рівняння:

$$\lambda Ce^{\lambda x} + pCe^{\lambda x} = 0, \qquad (16.20)$$

яке можна переписати у вигляді:

$$\lambda + p = 0. \qquad (16.21)$$

Це є ***характеристичне рівняння***.

Під час розв'язування лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами використовують твердження, яке є характерним для всіх лінійних рівнянь, а не тільки для рівнянь першого порядку.

**Теорема.** *Загальний розв'язок неоднорідного рівняння* $y' + p(x)y = f(x)$ *має вигляд* $y(x) = u(x) + (x)$, *де* $u(x)$ *– загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння* $y' + p(x)y = 0$, *а* $(x)$ *– частинний розв'язок відповідного неоднорідного рівняння.*

Більш детально дану тему розглядають під час вивчення вищої математики у вищих навчальних закладах III-IV рівнів акредитації.

**У результаті вивчення теми необхідно:**

| ***знати*** | ***вміти*** |
|---|---|
| - класифікацію диференціальних рівнянь;<br>- поняття загального розв'язку задачі Коші;<br>- методи розв'язування основних типів диференціальних рівнянь першого порядку;<br>- алгоритм знаходження розв'язку диференціального рівняння залежно від коренів характеристичного рівняння. | - розв'язувати диференціальні рівняння з відокремленими змінними;<br>- розв'язувати диференціальні рівняння із змінними, що відокремлюються;<br>- знаходити загальні та часткові розв'язки диференціальних рівнянь першого порядку;<br>- складати характеристичні рівняння;<br>- застосовувати диференціальні рівняння для розв'язування професійних задач. |

## Питання для самоконтролю

1. Які економічні задачі приводять до поняття диференціальних рівнянь?
2. Яке рівняння називається диференціальним? Від чого залежить порядок такого рівняння?
3. Що є розв’язком звичайного диференціального рівняння?
4. Сформулюйте означення загального та часткового розв’язків звичайного диференціального рівняння.
5. Яка задача називається задачею Коші?
6. Сформулюйте означення диференціального рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними. Який зв'язок між цими типами рівнянь?
7. Як розв’язуються рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними?
8. Сформулюйте означення неоднорідного та однорідного диференціального рівняння першого порядку.
9. Яке рівняння називається лінійним?
10. Запишіть характеристичне рівняння, що відповідає лінійному однорідному зі сталими коефіцієнтами.

## *Завдання для самостійного розв'язання*

***Рівень 1***

**227.** Перевірте, чи правильно знайдено невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$, $\left(\frac{3}{8}(x^4+1)^{\frac{2}{3}} + C\right)$;

б) $\int \frac{x^5 dx}{x^6+1}$, $\left(\frac{1}{6} arctgx^6 + C\right)$.

**228.** Дослідіть загальний вираз функції, похідна якої $y' = 3x^2 - 6x + 2$.

**229.** Дослідіть, якого значення набуде $\int(\cos x - \sin x)dx$ за умови, що первісна, при $x = \frac{\pi}{2}$, дорівнює 6.

**230.** Диференціал якої функції має вигляд $dy = (2x+6)dx$ ?

**231.** Знайдіть значення невизначених інтегралів:

1) $\int x \sin 5x dx$;

2) $\int \frac{xdx}{x^2+2}$;

3) $\int \ln(x^2+1)dx$;

4) $\int (x-1)\cos 3x dx$;

5) $\int \frac{dx}{x \ln x}$;

6) $\int e^{2x-1} dx$;

7) $\int (2x^2-3)^3 dx$;

8) $\int x^2 arctgx dx$;

9) $\int \frac{\sin x}{5+7\cos x} dx$;

10) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

**232.** Обчисліть визначені інтеграли:

1) $\int_1^4 \left( x + \frac{8}{x^2} - 5\sqrt[3]{x^2} \right) dx$;  2) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

3) $\int_0^3 x \cdot arctgx dx$;  4) $\int_{-1}^0 x \cdot e^x dx$;

5) $\int_1^e \ln x dx$.

**233.** Дослідіть значення функції $y$, що задовольняє умови $y' = 2x - 3$, $y(2) = 6$.

**234.** Знайдіть розв'язок диференціального рівняння:

1) $(1+x^2)dy - \sqrt{1-y^2}dx = 0$;  2) $(1+y^2)dx - \sqrt{x}dy = 0$;

3) $(1+y)dx - (1-x)dy = 0$;  4) $\sin xdy - y\ln ydx = 0$;

5) $ctgydx - x\ln xdy = 0$;  6) $xydx + (x+1)dy = 0$;

7) $\sqrt{y^2+1}dx - xydy = 0$;  8) $xdy + y^2dx = 0$;

9) $ydx + x^2dy = 0$;  10) $xy^2dx + x^2ydy = 0$.

***Рівень 2***

**235.** Дослідіть, для якої з первісних функції $f(x) = \frac{1}{5 - 3\cos x}$ виконується умова $F(0) = -1$.

**236.** Визначте знак інтеграла, не обчислюючи його:

а) $\int_0^{2\pi} x\sin xdx$;  б) $\int_{-1}^2 x^3dx$;  в) $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2\ln xdx$.

**237.** Дослідіть, чи можна інтеграл $\int_2^3 x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$ обчислювати за допомогою підстановки $x=\sin t$.

**238.** Дослідіть, яку площу має фігура, обмежена лініями:

а) $y=3x-1, \quad y=0, \quad x=2, \quad x=4$;

б) $y=-\frac{1}{3}x^2+3, \quad y=0, \quad x=0, \quad x=3$;

в) $y=4x-x^2, \qquad y=0$;

г) $y=x^2, \qquad 5x-y-6=0$.

**239.** Обчисліть площу фігури, обмеженої параболою $y=3x^2-6x$, прямою $x=4$ і віссю $Ox$ на відрізку $[0;4]$.

**240.** Визначте, яку площу має фігура, обмежена кривими $y=\dfrac{8}{4+x^2}$ і $y=\dfrac{x^2}{4}$?

**241.** Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі $Ox$ фігури, що обмежена лініями $2y=x^2$, $2x+2y-3=0$.

**242.** Для диференціального рівняння $y'=3y^{\frac{2}{3}}$ встановіть, які із наведених нижче функцій будуть загальним, частинним або особливим розв'язком:

а) $y=(x+2)^3$; б) $y=(x+c)^3$;

в) $y=x^3$;

г) $y=0$; д) $y=x^3-6x^2+12x-8$;

е) $y=2x^3$.

**243.** Визначте, чи будуть розв'язками наведених диференціальних рівнянь зазначені поряд функції:

а) $xy' = 2y$; $y = 5x^2$; б) $(x+y)dx + xdy = 0$; $y = \dfrac{C - x^2}{2x}$;

в) $(x - y + 1)y' = 2x - y$; $x^2 - xy + y^2 = C$.

**244.** Дослідіть, яке диференціальне рівняння задовольняє функцію $y = Cx^3$.

***<u>Рівень 3</u>***

**245.** Дослідіть, які з запропонованих нерівностей правильні:

а) $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx > \int\limits_0^1 x\,dx$; б) $\int\limits_0^1 x^2 \sin^2 x\,dx > \int\limits_0^1 x \sin^2 x\,dx$;

в) $\int\limits_1^2 e^{x^2} dx > \int\limits_1^2 e^x dx$; г) $\int\limits_0^1 e^{-x} dx > \int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$.

**246.** Дослідіть, який вигляд має рівняння кривої, що проходить через точку $A\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ і для якої кутовий коефіцієнт у кожній її точці дорівнює $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

**247.** Знайдіть значення параметра $a$, при якому задана функція є розв'язком рівняння:

а) $y = e^{ax} + \dfrac{1}{3}e^x$, $y' + 2y = e^x$;

б) $y = \left(x^2 - x\right)^a$, $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$;

в) $y = x^a$; $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$.

**248.** Дослідіть, при яких значеннях $A$ і $a$ функція $y = A\cos ax$ буде розв'язком рівняння $y' = y \cdot tgx$.

**249.** Число інвестиції задано функцією $f(t) = 7000\sqrt{t}$. Визначте приріст капіталу за 3 роки. Дослідіть, скільки пройде років до моменту, коли приріст капіталу становитиме 50000.

**250.** Якби граничні витрати деякої фірми були відомі й дорівнювали $f'(x) = x^2 + 3x + 5$, то чому дорівнювали б сумарні витрати, якщо початкові витрати становлять 90 ум.од.?

**251.** Продуктивність праці протягом робочого дня визначається функцією $p(t) = -3t^2 + 10t + 75$, де t – час у годинах. Дослідіть, яка кількість *N* виробленої продукції за 8 годин робочого дня?

**252.** Продуктивність праці робітника протягом робочої зміни приблизно задається функцією $y = -0{,}0033x^2 - 0{,}089x + 20{,}96$, де $x$ – час (у годинах). Обчисліть об'єм випуску продукції протягом року, якщо кількість робочих днів дорівнює 240.

**253.** Потреба в електричному струмі деякого підприємства, що починає працювати о 7 год. ранку, виражається функцією $y = 300 - 7{,}7x + 0{,}6x^2$, де $x$ – кількість год. Дослідіть, скільки треба підприємству заплатити за електроенергію, використану за добу, якщо $1кВт \cdot год$ коштує 47 копійок.

**254.** Знайдіть обсяг продукції, виробленої фірмою за 4 роки, якщо функція Кобба-Дугласа $g(t) = (1+t)e^{3t}$.

**255.** Дослідіть, який обсяг продукції вироблено за 4 роки за умови, що продуктивність праці виражається формулою $f(t) = (1+t)e^{3t}$.

**256.** Функція маргінальних витрат виробництва $x$ одиниць продукції за певний час має вигляд $v'(x) = 50 - 0{,}02x$. Дослідіть, як зростуть витрати виробництва (у гривнях) при збільшенні випуску продукції від 100 до 120 одиниць?

**257.** Компанія вкладає 7 млн. грн. у нове обладнання, плануючи протягом 5 років отримати 2 млн. грн. прибутку за умови щорічної номінальної облікової ставки 10%. Дослідіть, яке реальне значення загального прибутку компанії?

**258.** Маргінальні витрати виробництва задано функцією $v'(x) = 0{,}06x^2 - 0{,}2x$, а маргінальний дохід $D'(x) = 240 - 0{,}4x$. Визначте функцію загальних витрат $V(x)$, якщо фіксовані виробничі витрати (незалежно від кількості виробленої продукції) становлять 200 грн. Обчисліть витрати та прибуток при виробництві 100 одиниць продукції. Як зміняться витрати та прибуток при збільшенні виробництва від 100 до 150 одиниць?

**259.** Серед усіх функцій, що задовольняють рівняння $y' - \dfrac{2x-2}{x^2 - 4x + 3} = 0$, знайдіть ту, графік якої проходить через точку (2;1), тобто розв'яжіть задачу Коші для заданого рівняння.

## Індивідуальні додаткові завдання

### <u>Завдання 1</u>

*Виконуючи завдання по доведенню визначників (наведені у питанні «Властивості визначників», модуль 1 – див. зміст) на конкретному, індивідуальному прикладі підтвердіть їх формулювання.*

Рекомендуємо рухатися поетапно:

1. Утворіть визначник (початковий може бути завжди однаковий) та обчисліть його одним із відомих методів (правилом трикутника, правилом ліній, теоремою розкладу визначника за елементами довільного рядка чи стовпця ). Наприклад,

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 + 0 + 3 + 0 - 4 - 2 = 3 - 2 = 1$$

2. До кожної властивості здійсніть необхідні перетворення початкового визначника:
   - для першої властивості поміняйте місцями усі елементи рядків та стовпців: перший рядок стане першим стовпцем, другий рядок – другим стовпцем, третій рядок – третім стовпцем;
   - для другої властивості – лише два рядки чи стовпці визначника поміняйте місцями, наприклад перший та третій рядки і так далі.

3. Обчисліть утворений визначник та порівняйте результат з очікуваним. Для наведеного початкового визначника перевіримо другу властивість, помінявши місцями перший та третій рядки.

*Властивість 2.* Якщо поміняти місцями довільні два рядки (стовпці), то визначник змінить знак на протилежний:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0+2+4-4-3+0=-1$$

*Висновок. Як і стверджувала властивість 2, значення визначника змінило знак на протилежний (замість 1 отримали -1), що і доводить її справедливість.*

## Завдання 2

Розв’яжіть систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), індивідуальний варіант якої співпадає з вашим порядковим номером у списку групи (сторінка вищої математики) **методами Крамера, Гаусса та матричним способом**.

| № Варіанту | Умова Завдання 1 | № Варіанту | Умова Завдання 1 |
|---|---|---|---|
| **1.** | $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$ | **2.** | $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 8x+3y-6z=2 \\ -4x-y+3z=-3 \end{cases}$ |
| **3.** | $\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3=3 \\ 2x_1-x_2+x_3=1 \\ 4x_1-3x_2+3x_3=5 \end{cases}$ | **4.** | $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3=-1 \\ 2x_1+x_2-x_3=-7 \\ x_1-5x_2+2x_3=2 \end{cases}$ |
| **5.** | $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1-x_2+2x_3=6 \\ x_1+x_2+5x_3=-1 \end{cases}$ | **6.** | $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=6 \\ 2x_1-x_2+x_3=5 \\ 3x_1+x_2+2x_3=7 \end{cases}$ |
| **7.** | $\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3=3 \\ -x_1+3x_2+x_3=-4 \\ 3x_1-x_2+3x_3=-4 \end{cases}$ | **8.** | $\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3=1 \\ -x_1+2x_2-2x_3=0 \\ 3x_1-2x_2-x_3=3 \end{cases}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **9.** | $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$ | **10.** | $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ |
| **11.** | $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$ | **12.** | $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$ |
| **13.** | $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ | **14.** | $\begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ 3x + y - 5z = 0 \\ x + 3y - 13z = -6 \end{cases}$ |
| **15.** | $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$ | **16.** | $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3x = 11 \end{cases}$ |
| **17.** | $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 5y - 3z = 4 \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}$ | **18.** | $\begin{cases} 2x - 3y + z = -1 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y - 2z = -1 \end{cases}$ |
| **19.** | $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + 3y + z = 5 \\ x + y + 5z = -7 \end{cases}$ | **20.** | $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 4y + z = 6 \\ x + y + 4z = 0 \end{cases}$ |
| **21.** | $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$ | **22.** | $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = -12 \end{cases}$ |
| **23.** | $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$ | **24.** | $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$ |
| **25.** | $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 11 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$ | **26.** | $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$ |
| **27.** | $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = -7 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ | **28.** | $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 17 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -3 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -10 \end{cases}$ |
| **29.** | $\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15 \\ 5x - 3y + 2z = 15 \\ 10x - 11y + 5z = 36 \end{cases}$ | **30.** | $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 5y - 3z = 4 \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}$ |

## <u>**Завдання 3**</u>

*Уважно прочитайте умову задання. У таблиці (перший та третій стовпці) виберіть номер варіанту, що відповідає вашому порядковому номеру у журналі групи. Навпроти номеру варіанту записані три точки з координатами. Для кожного варіанту вони індивідуальні! Виконайте завдання.*

Дано координати вершин трикутника ABC. Знайти:

a) Довжину сторони BC;
b) Рівняння сторони BC;
c) Рівняння та довжину висоти AD;
d) Рівняння медіани AM та її довжину;
e) Площу трикутника ABC.

| **№ Варіанту** | **Координати вершин трикутника** | **№ Варіанту** | **Координати вершин трикутника** |
|---|---|---|---|
| **1.** | A(3;-2), B(0;10), C(6;2) | **2.** | A(0;3), B(3;15), C(9;7) |
| **3.** | A(1;1), B(4;13), C(10;5) | **4.** | A(-2;0), B(1;12), C(7;4) |
| **5.** | A(4;4), B(7;16), C(13;8) | **6.** | A(-3;3), B(6;9), C(12;1) |
| **7.** | A(2;-1), B(5;11), C(11;3) | **8.** | A(9;-14), B(8;8), C(14;0) |
| **9.** | A(0;5), B(12;0), C(18;8) | **10.** | A(1;5), B(13;0), C(-8;-2) |
| **11.** | A(6;1), B(-6;-4), C(-10;-1) | **12.** | A(-1;5), B(11;0), C(17;8) |
| **13.** | A(-1;7), B(11;2), C(10;1) | **14.** | A(5;3), B(17;8), C(14;4) |
| **15.** | A(-3;-5), B(9;0), C(6;4) | **16.** | A(10;-1), B(-2;-6), C(-10;3) |
| **17.** | A(1;8), B(4;12), C(16;17) | **18.** | A(7;6), B(10;10), C(22;15) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **19.** | A(8;3), B(20;8), C(23;12) | **20.** | A(1;-5), B(10;-2), C(12;4) |
| **21.** | A(7;-1), B(4;5), C(-4;-1) | **22.** | A(2;-5), B(14;1), C(-4;-2) |
| **23.** | A(6;3), B(-3;-4), C(-8;2) | **24.** | A(1;4), B(10;0), C(15;4) |
| **25.** | A(7;4), B(-3;3), C(-6;-3) | **26.** | A(-2;6), B(-7;2), C(15;6) |
| **27.** | A(-6;4), B(-4;7), C(6;2) | **28.** | A(-3;8), B(-5;-2), C(1;-1) |
| **29.** | A(2;-2), B(-2;5), C(2;-7) | **30.** | A(0;3), B(-3;2), C(-1;3) |

## Завдання 4

*Уважно прочитайте умову задання. У таблиці (перший та третій стовпці) виберіть номер варіанту, що відповідає вашому порядковому номеру у журналі групи. Навпроти номеру варіанту записані три точки простору (з координатами). Для кожного варіанту вони індивідуальні! Користуючись теоретичним матеріалом, виконайте завдання.*

Дано координати вершин піраміди ABCD. Потрібно:

1. Записати $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ у системі орт $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, і знайти їх модулі
2. Знайти кут між векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$
3. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$
4. Знайти площу грані ABC
5. Знайти об’єм піраміди ABCD
6. Записати рівняння ребра AC
7. Знайти рівняння грані ABC

| **№ Варіанту** | **Координати вершин піраміди** | **№ Варіанту** | **Координати вершин піраміди** |
|---|---|---|---|
| **1.** | A(1;2;1), B(-1;5;1), C(-1;2;7), D(1;5;9). | **2.** | A(2;3;2), B(0;6;2), C(0;3;8), D(2;6;10). |
| **3.** | A(0;3;2), B(-2;6;2), C(-2;3;8), D(0;6;10). | **4.** | A(2;1;2), B(0;4;2), C(0;1;8), D(2;4;10). |
| **5.** | A(2;3;0), B(0;6;0), C(0;3;6), D(2;6;8). | **6.** | A(2;2;1), B(0;5;1), C(0;2;7), D(2;5;9). |
| **7.** | A(1;3;1), B(-1;6;1), C(-1;3;7), D(1;6;9). | **8.** | A(1;2;2), B(-1;5;2), C(-1;2;8), D(1;5;10). |
| **9.** | A(2;3;1), B(0;6;1), C(0;3;7), D(2;6;9). | **10.** | A(2;2;2), B(0;5;2), C(0;2;8), D(2;5;10). |
| **11.** | A(1;3;2), B(-1;6;2), C(-1;3;8), D(1;6;10). | **12.** | A(0;1;2), B(-2;4;2), C(-2;1;8), D(0;4;10). |
| **13.** | A(0;3;0), B(-2;6;0), C(-2;3;6), D(0;6;8). | **14.** | A(2;1;0), B(0;4;0), C(0;1;6), D(2;4;8). |
| **15.** | A(0;2;1), B(-2;5;1), C(-2;2;7), D(0;5;9). | **16.** | A(1;1;1), B(-1;4;1), C(-1;1;7), D(1;4;9). |
| **17.** | A(1;2;0), B(-1;5;0), C(-1;2;6), D(1;5;8). | **18.** | A(0;1;0), B(-2;4;0), C(-2;1;6), D(0;4;8). |
| **19.** | A(0;1;1), B(-2;4;1), C(-2;1;7), D(0;4;9). | **20.** | A(0;2;0), B(-2;5;0), C(-2;2;6), D(0;5;8). |
| **21.** | A(2;1;3), B(3;-2;1), C(1;-3;-4), D(7;0;7). | **22.** | A(5;3;1), B(-2;-2;2), C(-2;1;4), D(3;0;1). |
| **23.** | A(1;3;5), B(-2;-1;-1), C(4;-2;4), D(-7;3;-1). | **24.** | A(3;1;6), B(-2;2;-3), C(-4;5;-1), D(3;0;1). |
| **25.** | A(4;1;4), B(-2;-1;1), C(3;1;5), D(-3;-2;1). | **26.** | A(1;2;5), B(2;-3;4), C(1;-1;-2), D(3;0;1). |
| **27.** | A(5;1;2), B(3;4;-1), C(-4;2;1), D(-3;5;4). | **28.** | A(2;1;5), B(-4;3;5), C(1;-1;-4), D(4;-1;-3). |
| **29.** | A(3;1;4), B(-4;2;3), C(2;-1;-2), D(7;-1;0). | **30.** | A(1;4;2), B(5;-2;-3), C(-2;-1;1), D(-3;2;4). |

## <u>Завдання 5</u>

*Варіанти 1-10 виконують завдання I (перша таблиця), якщо номер варіанту 11-25 – завдання II (друга таблиця)*

**I.** Дано координати точок $A(x_1;y_1)$ та $B(x_2;y_2)$ і R – радіус кола з центром в точці O(0;0).

1) Складіть канонічне рівняння еліпса, який проходить через точку A та B.
2) Знайдіть ексцентриситет еліпса.
3) Знайдіть точку перетину еліпса з колом.

Побудуйте рисунок.

| **№ Варіанту** | **Точки з координатами та радіус** |
|---|---|
| **1.** | $A(3;2\sqrt{3}), B(3\sqrt{3};-2), R = \sqrt{26}$ |
| **2.** | $A(2;\sqrt{3}), B(-2\sqrt{3};1), R = \sqrt{7}$ |
| **3.** | $A(4;2\sqrt{3}), B(4\sqrt{2} - 2\sqrt{2};), R = 2\sqrt{13}$ |
| **4.** | $A(5\sqrt{2};4\sqrt{2}), B(-5\sqrt{3};4), R = \sqrt{73}$ |
| **5.** | $A(3\sqrt{2};\sqrt{2}), B(3\sqrt{3};-1), R = 2\sqrt{3}$ |
| **6.** | $A(= 3;2\sqrt{3}), B(-3\sqrt{3};-2), R = \sqrt{23}$ |
| **7.** | $A(-5\sqrt{2};4\sqrt{2}), B(5\sqrt{3};4), R = \sqrt{64}$ |
| **8.** | $A(-2;-\sqrt{3}), B(2\sqrt{3};1), R = \sqrt{5}$ |
| **9.** | $A(3\sqrt{2};-\sqrt{2}), B(-3\sqrt{3};-1), R = 2\sqrt{3}$ |
| **10.** | $A(-4;-2\sqrt{3}), B(4\sqrt{2};2\sqrt{2}), R = \sqrt{11}$ |

**II.** Дано координати точок $A(x_1;y_1)$ та $B(x_2;y_2)$ і R – радіус кола з центром в точці O(0;0)

1) Складіть канонічне рівняння гіперболи, що проходить через точки A та B.
2) Знайдіть ексцентриситет і рівняння асимптот гіперболи.
3) Знайдіть координати точок перетину кола з гіперболою.

Побудуйте гіперболу, асимптоти і кола.

| № Варіанту | Точки з координатами та радіус |
|---|---|
| **1.** | $A(3\sqrt{2};-2), B(2\sqrt{6};2\sqrt{2}), R = 2\sqrt{13}$ |
| **2.** | $A(4\sqrt{6};-\sqrt{10}), B(-8;2\sqrt{15}), R = \sqrt{61}$ |
| **3.** | $A(4\sqrt{3};-8), B(-2\sqrt{6};1), R = \sqrt{61}$ |
| **4.** | $A(2\sqrt{3}-4;), B(3;\sqrt{10}), R = 10$ |
| **5.** | $A(-6;6\sqrt{3}), B(3\sqrt{2};6), R = \sqrt{89}$ |
| **6.** | $A\left(\frac{8}{5}\sqrt{34};3\right), B\left(\frac{8}{5}\sqrt{29};2\right), R = 2\sqrt{26}$ |
| **7.** | $A\left(\frac{3}{2}\sqrt{53};7\right), B\left(\frac{3}{2}\sqrt{29};5\right), R = \sqrt{62}$ |
| **8.** | $A(4\sqrt{13};2), B(2\sqrt{34};5), R = 2\sqrt{33}$ |
| **9.** | $A\left(\frac{5}{3}\sqrt{58};7\right), B\left(\frac{5}{3}\sqrt{13};2\right), R = \sqrt{92}$ |
| **10.** | $A\left(\frac{7}{5}\sqrt{29};2\right), B\left(\frac{7}{5}\sqrt{34};3\right), R = 3\sqrt{11}$ |
| **11.** | $A(-3\sqrt{2};-2), B(-2\sqrt{6};2\sqrt{2}), R = 2\sqrt{13}$ |

| | |
|---|---|
| **12.** | $A(-4\sqrt{3};-8), B(2\sqrt{6};1), R=\sqrt{61}$ |
| **13.** | $A(-6;-6\sqrt{3}), B(-3\sqrt{2};6), R=\sqrt{89}$ |
| **14.** | $A(-4\sqrt{13};-2), B(-2\sqrt{34};-5), R=2\sqrt{33}$ |
| **15.** | $A(2\sqrt{3};4), B(-3;\sqrt{10}), R=10$ |

## Завдання 6

*Відповідно до номеру Вашого варіанту обчисліть границі функції в точці або на нескінченності. Зверніть увагу на те, що кожен варіант містить дві дужки (а, б). Виконайте обидві найзручнішим для вас способом та за допомогою правила Лопіталя.*

***Зауваження***

*1) завдання з коренями потребують домноження чисельника та знаменника на вираз, спряжений до ірраціонального;*

*2) завдання з тригонометричними функціями гарно виконувати за допомогою першої визначної границі, а ті, що містять піднесення до степеня з невідомою – за другою визначною.*

| **№ Варіанту** | **Обчисліть границю функції** | |
|---|---|---|
| | ***а*** | ***б*** |
| **1.** | $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^3+5x^2-2x-6}{5x^3+7x^2-13x+1}$ | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$ |
| **2.** | $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+2x+1}{5x^2-4x+7}$ | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{3x}$ |
| **3.** | $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^3+2x^2-3x-42}{7x^3-5x^2+8x-52}$ | $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}{x-4}$ |
| **4.** | $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{7x^3+5x^2-17x+5}{3x^3+13x^2-21x+5}$ | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{ctg} x}{\cos x}$ |

| | | |
|---|---|---|
| **5.** | $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-1}}{x-3}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+9x+1}{3x^2+2x-11}$ |
| **6.** | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-7x+10}{8x^2-2x+77}$ | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$ |
| **7.** | $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^3+5x^2-6x-40}{9x^3-12x^2+3x-18}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x+3}$ |
| **8.** | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^5+3x^3-1}{2x^2+x^5+4x^3}$ | $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}}{x-5}$ |
| **9.** | $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^3+3x^2-8x-57}{5x^3+4x^2-46x-33}$ | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}$ |
| **10.** | $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x^3+13x^2-11x-8}{7x^3+21x^2-38x+10}$ | $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{3-x}}{x+1}$ |
| **11.** | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+8x+13}{8x^2+7x+9}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x+1}$ |
| **12.** | $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$ | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 2x}$ |
| **13.** | $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^3+8x^2-13x-30}{7x^3-5x^2+4x-44}$ | $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{3}{x-2}}$ |
| **14.** | $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{15-x}}{x^2-5x-6}$ | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$ |
| **15.** | $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3+5x^2-4x-28}{5x^3-13x^2-3x+18}$ | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-\sin x}{5x}$ |
| **16.** | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-8x^2+13}{2x^4+7x^2-9}$ | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+1}-x}{3x^2-x}$ |
| **17.** | $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2+2x^2-6x-81}{5x^3+3x^2-20x-102}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{3x+1}$ |

| | | |
|---|---|---|
| **18.** | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2-6x-81}{4x^3+4x^2-5x+3}$ | $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x}-1}{x^2-25}$ |
| **19.** | $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^3+10x^2-9x-5}{7x^3-17x^2-30x-6}$ | $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\operatorname{tg}3x}{\sin^2 2x}$ |
| **20.** | $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{5x^2-7x+5}{3x^2-9x+16}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{3x+2}$ |
| **21.** | $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-7x+12}{3x^2-9}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x}{5x-2}\right)^{1-3x}$ |
| **22.** | $\lim\limits_{x\to11}\dfrac{\sqrt{4x-9}-\sqrt{3x+2}}{x-11}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{7x-5}$ |
| **23.** | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{13x^2-3x-7}{4x^2+2x-9}$ | $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^3+2x}$ |
| **24.** | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-3x^2+4x-2}{3x^3-x^2+x-3}$ | $\lim\limits_{x\to0}(1-7x)^{\frac{2}{x}}$ |
| **25.** | $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{2x+5}}{x^2-4x+9}$ | $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$ |
| **26.** | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+13x^2-5x+10}{5x^3-7x^2+3x-5}$ | $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4\sin^2 2x}{x\operatorname{tg}5x}$ |
| **27.** | $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3+x^2-10x-6}{2x^3+x^2-20x-3}$ | $\lim\limits_{x\to0} tg2x * ctgx$ |
| **28.** | $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{3x+5}-\sqrt{2x-7}}{x^2-4}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{7x-1}$ |
| **29.** | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x^2-2x+7}{3x^3-3x^2+x-5}$ | $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{8-x}-\sqrt{4+x}}{x^2-x-2}$ |
| **30.** | $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-x-2}{x^3-x}$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+3x^2-4}{5x^2-4x^2+7}$ |

## Завдання 7

*Відповідно до номеру Вашого варіанту знайдіть значення похідних функцій (дужки а, б, в). Розв'язання потребує детального обґрунтування кожного етапу.*

| № Ва-ріанту | Обчисліть значення похідної | | |
|---|---|---|---|
| | ***а*** | ***б*** | ***в*** |
| **1.** | $y = xctgx$ | $y = ln^2(x + \sqrt{x^2 + 1})$ | $y = \frac{x^4}{\sin 2x}$ |
| **2.** | $y = arcsin\sqrt{x + 1}$ | $y = \frac{\cos 5x}{x^2 + 1}$ | $y = \sqrt[3]{x} \cdot tgx$ |
| **3.** | $y = (3 - 7x)sinx$ | $y = ln^4(x - \sqrt{x})$ | $y = \frac{ctgx}{\sqrt{x}}$ |
| **4.** | $y = arctg\sqrt{4x + 1}$ | $y = \frac{tg5x}{1 - x^2}$ | $y = e^{-cosx}$ |
| **5.** | $y = ln^3(x^2 + 2x + 1)$ | $y = \frac{x}{sinx}$ | $y = xln^2x$ |
| **6.** | $y = 3x^4 - \frac{5}{3x^3} - 9\sqrt{3}x^2 - 1$ | $y = arctg\sqrt{x}$ | $y = 2^{-x^3}$ |
| **7.** | $y = sinx \cdot ln(x - 2)$ | $y = (3x^2 + e^{2x})^4$ | $y = \frac{x}{tgx}$ |
| **8.** | $y = ln\sqrt{\frac{1 - sinx}{1 + sinx}}$ | $y = 2x^5 - \frac{1}{6x^3} + 4\sqrt[3]{x^4} + 2$ | $y = arctg2\sqrt{x}$ |
| **9.** | $y = x^2sinx$ | $y = \frac{arctgx}{1 + x^2}$ | $y = tg^2 5x$ |
| **10.** | $y = (5x^2 - \frac{3}{x} + sin^3 2x)^4$ | $y = x^5cosx$ | $y = ln^3(x + \sqrt{x})$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **11.** | $y = arcsinx(x^2 + 2)$ | $y = \frac{ctgx}{1 + 2x}$ | $y = x^{\sqrt{x}}$ |
| **12.** | $y = \sqrt{x}e^{-x}$ | $y = (x^2 + lnx)^3$ | $y = arctg\sqrt[3]{1 + x}$ |
| **13.** | $y = \frac{ctgx}{x}$ | $y = x^3 sin5x$ | $y = 5x^4 - \frac{2}{3x^3} + 6\sqrt[3]{x - 4}$ |
| **14.** | $y = x^4 \cdot e^{-2x}$ | $y = \frac{tgx}{2x + x^2}$ | $y = (3x - 2lnx)^3$ |
| **15.** | $y = xln(1 + \sqrt{x})$ | $y = \frac{cosx}{2 + x^2}$ | $y = arccos\frac{1}{\sqrt{x}}$ |
| **16.** | $y = \sqrt[3]{x}cosx$ | $y = \frac{cos5x}{x^2 + 1}$ | $y = 8x^4 + \frac{5}{2x^3} - 4\sqrt[3]{x^5} - 5$ |
| **17.** | $y = sin^5(3 - 2x)$ | $y = e^{sinx}$ | $y = \frac{sinx}{2x - 3}$ |
| **18.** | $y = xe^{-x^2}$ | $y = arccos\sqrt{x}$ | $y = \frac{x^3 - 3x}{sinx}$ |
| **19.** | $y = \sqrt{x + 1}sinx$ | $y = \frac{tg^4x}{x}$ | $y = (ln3x - cosx)^2$ |
| **20.** | $y = xe^{-x^2}$ | $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$ | $y = ln\frac{1}{x^2 + sinx}$ |
| **21.** | $y = arcctg(1 - x)$ | $y = e^{2x}(x^3 + 1)$ | $y = ln^3(x + \sqrt{x})$ |
| **22.** | $y = \frac{ctg4x}{x}$ | $y = x^5 \cdot 2^{-4x}$ | $y = 4x^2 - \frac{3}{2x^3} + 7\sqrt[3]{x^{14}} - 5$ |
| **23.** | $y = (3 - 5x)e^x$ | $y = \frac{sin2x}{\sqrt{x}}$ | $y = cos^3(2x - 5)$ |
| **24.** | $y = ln(x + \sqrt{3x + 1})$ | $y = \frac{ctg4x}{x^2}$ | $y = e^{-sinx}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **25.** | $y = ln^2(x^3 - \sqrt{x})$ | $y = a^{-4x}$ | $y = x^2 sinx$ |
| **26.** | $y = \frac{x^2}{cosx}$ | $y = (5 - 2x)tgx$ | $y = (2x^2 - sin5x)^4$ |
| **27.** | $y = \sqrt{x^3} sinx$ | $y = 4^{2x^2+1}$ | $y = 7x^4 + \frac{1}{2x^3} - 3\sqrt[4]{x^3} + 8$ |
| **28.** | $y = x^{\frac{1}{x}}$ | $y = \frac{tg5x}{2x - 1}$ | $y = (7 - 3x)tgx$ |
| **29.** | $y = \sqrt{x + 1} cos3x$ | $y = \frac{ctgx}{x}$ | $y = arctg(1 - \sqrt[3]{x})$ |
| **30.** | $y = x^3 sinx$ | $y = ln^3(x + \sqrt{x - 1})$ | $y = \frac{tg4x}{x^2 + 1}$ |

## ***Завдання 8***

*Дослідити функцію та побудувати її графік. Рекомендуємо проводити дослідження по кроках (за схемою):*

1. *Знайти область визначення функції D(y)*
2. *Дослідити функцію на парність, періодичність та неперервність.*
3. *Знайти точки екстремуму функції та встановити інтервали монотонності.*
4. *Знайти точки перегляду графіка функції та інтервали опуклості й вгнутості графіка.*
5. *Знайти асимптоти графіка функції.*
6. *Побудувати графік, використовуючи попередні результати.*

*Додатково знайти найбільше і найменше значення на відрізку* $[\alpha; \beta]$

| № Варіанту | Функція | Проміжок |
|---|---|---|
| **1.** | $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ | α= -1, β= 3 |
| **2.** | $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ | α= -1, β= 2 |
| **3.** | $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 10$ | α= 2, β= 4 |
| **4.** | $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ | α= -1, β= 2 |
| **5.** | $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$ | α= 0, β= 4 |
| **6.** | $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$ | α= -2, β= 3 |
| **7.** | $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$ | α= -3, β= 0 |
| **8.** | $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 7$ | α= -3, β= 1 |
| **9.** | $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 32$ | α= 1, β= 4 |
| **10.** | $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 20$ | α= -1, β= 4 |
| **11.** | $y = 2x^3 + 36x^2 - 36x - 21$ | α= -4, β= 1 |
| **12.** | $y = 2x^3 + 15x^2 + 36x + 32$ | α= -4, β= 0 |
| **13.** | $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 4$ | α= 1, β= 5 |

| | | |
|---|---|---|
| **14.** | $y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 61$ | α= -2, β= 3 |
| **15.** | $y = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 56$ | α= -5, β= 2 |
| **16.** | $y = 2x^3 + 15x^2 24x - 2$ | α= -5, β= 0 |
| **17.** | $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$ | α= 0, β= 3 |
| **18.** | $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 26$ | α= -3, β= 5 |
| **19.** | $y = x^3 + 3x^2 - 24x - 21$ | α= -5, β= 3 |
| **20.** | $y = x^3 + 9x^2 + 24x + 17$ | α= -5, β= 1 |
| **21.** | $y = x^3 - 3x^2 + 3$ | α= 1, β= 3 |
| **22.** | $y = x^3 - 6x^2 + 2$ | α= -2, β= 2 |
| **23.** | $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ | α= -2, β= 4 |
| **24.** | $y = -2x^3 - 9x^2 + 6$ | α= -2, β= 1 |
| **25.** | $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 5$ | α= 0, β= 3 |
| **26.** | $y = \frac{2x + 3}{x^2 + 4}$ | α= -2, β= 2 |
| **27.** | $y = \frac{3x + 4}{x^2 + 1}$ | α= -1, β= 4 |

| | | |
|---|---|---|
| **28.** | $y = \frac{x+1}{x^2+3}$ | α= 0, β= 3 |
| **29.** | $y = \frac{2x+1}{x^2+6}$ | α= -3, β= 4 |
| **30.** | $y = \frac{4x-1}{x^2+3}$ | α= -1, β= 3 |

## Завдання 9

*Обчисліть невизначений (а) та визначений (б) інтеграл використовуючи найбільш доцільний спосіб.*

| **№ Варіанту** | **Умова Завдання 9** | |
|---|---|---|
| | **а** | **б** |
| **1.** | $\int (x-3)arcsin\,x\,dx$ | $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x+\pi)\,dx$ |
| **2.** | $\int (3x^2-1)^2 dx$ | $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2}$ |
| **3.** | $\int \frac{x^4}{1+x^2}dx$ | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4x\,cosx\,dx$ |
| **4.** | $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ | $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}$ |
| **5.** | $\int cos\,(3x+5)dx$ | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,cos2x\,dx$ |
| **6.** | $\int e^{2x-1}dx$ | $\int_0^1 arctg\,x\,dx$ |
| **7.** | $\int (2x^2-3)^3 dx$ | $\int_0^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{1+x^2}dx$ |
| **8.** | $\int \frac{dx}{\sqrt{1+25x^2}}$ | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x cosx\,dx$ |

| | | |
|---|---|---|
| **9.** | $\int \frac{x}{e^x} dx$ | $\int_1^e ln^2 x\, dx$ |
| **10.** | $\int \frac{2x}{x^2 + 5}$ | $\int_1^2 x \ln x\, dx$ |
| **11.** | $\int \frac{sinx}{5 + 7cosx} dx$ | $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\, dx$ |
| **12.** | $\int \frac{x}{1 - x^2} dx$ | $\int_{-2}^4 (9x^3 + \frac{2}{7x^8} - \frac{1}{sin^2 x})\, dx$ |
| **13.** | $\int e^{x^3} x^2\, dx$ | $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x\, sin3x\, dx$ |
| **14.** | $\int \frac{dx}{x(1 - lnx)}$ | $\int_0^2 \frac{e^x}{e^{2x} + 5} dx$ |
| **15.** | $\int (x^2 + 5x + 6) cosx\, dx$ | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xcos2x\, dx$ |
| **16.** | $\int (x + 1) e^{-x} dx$ | $\int_0^1 e^{2x} dx$ |
| **17.** | $\int (3x^2 \frac{8}{x^5} + 11\sqrt[9]{x^2}) dx$ | $\int_1^3 x^2 \sqrt{x^2 - 1} dx$ |
| **18.** | $\int arcsinx\, dx$ | $\int_1^e \frac{ln^2 x}{x} dx$ |
| **19.** | $\int xln^2 x\, dx$ | $\int_0^1 xe^x\, dx$ |
| **20.** | $\int x^3 ln5x\, dx$ | $\int_0^\pi x^2 sinx\, dx$ |
| **21.** | $\int e^{2x} cos3x\, dx$ | $\int_0^1 \frac{xdx}{1 + \sqrt{x}}$ |
| **22.** | $\int x\, arctg\, x\, dx$ | $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$ |
| **23.** | $\int cosx\, sin^4 x\, dx$ | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x\, dx$ |

| | | |
|---|---|---|
| **24.** | $\int x^2 e^{2x^3} dx$ | $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ |
| **25.** | $\int arctg\ 3x\ dx$ | $\int_0^1 x\ arctg\ x\ dx$ |
| **26.** | $\int x^2 cos3x\ dx$ | $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\ cos5x\ dx$ |
| **27.** | $\int \sqrt{sin3x}\ co3x\ dx$ | $\int_{-1}^2 x^3 lnx\ dx$ |
| **28.** | $\int xsin\ 0.5x\ dx$ | $\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} (x-3)\arcsin x\ dx$ |
| **29.** | $\int x\ e^{3x} dx$ | $\int_3^5 \frac{dx}{5x+3}$ |
| **30.** | $\int xsin2x\ dx$ | $\int_1^3 ln^2 x\ dx$ |

## Завдання 10

*Обчислити площу фігури, обмежену лініями, що запропоновані в умові завдання.*

| **№ Варіанту** | **Умова Завдання 10** | |
|---|---|---|
| | *Рівняння ліній, що обмежують площу фігури* | |
| **1.** | $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ | $y = -2x^2 + x + 5$ |
| **2.** | $y = \frac{1}{2}x^2 + x2$ | $y = -\frac{1}{2}x^2 - 5x + 7$ |
| **3.** | $y = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 2$ | $y = -\frac{2}{3}x^2 - 2x + 4$ |
| **4.** | $y = 2x^2 + 6x - 3$ | $y = -x^2 + x + 5$ |

| | | |
|---|---|---|
| **5.** | $y = 3x^2 - 5x - 1$ | $y = -x^2 + 2x + 1$ |
| **6.** | $y = x^2 - 3x - 1$ | $y = -x^2 - 2x + 5$ |
| **7.** | $y = 2x^2 - 6x - 1$ | $y = -x^2 + x - 1$ |
| **8.** | $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 1$ | $y = -\frac{2}{3}x^2 - x + 2$ |
| **9.** | $y = x^2 - 5x - 3$ | $y = -3x^2 + 2x - 1$ |
| **10.** | $y = x^2 - 2x - 5$ | $y = -x^2 - x + 1$ |
| **11.** | $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 5$ | $y = -\frac{3}{4}x^2 - x + 1$ |
| **12.** | $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$ | $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 3$ |
| **13.** | $y = 2x^2 - 6x + 3$ | $y = -2x^2 + x + 5$ |
| **14.** | $y = x^2 - 3x - 4$ | $y = -x^2 - x + 8$ |
| **15.** | $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 1$ | $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 2$ |
| **16.** | $y = 2x^2 + 4x - 7$ | $y = -x^2 - x + 1$ |
| **17.** | $y = 2x^2 + 3x + 1$ | $y = -x^2 - 2x + 9$ |
| **18.** | $y = 2x^2 - 6x - 2$ | $y = -x^2 + x - 4$ |
| **19.** | $y = x^2 - 2x - 4$ | $y = -x^2 - x + 2$ |

| | | |
|---|---|---|
| **20.** | $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 2$ | $y = -\frac{1}{2}x^2 - 7x + 3$ |
| **21.** | $y = \frac{1}{4}(x-1)^2$ | $x - 2y + 11 = 0$ |
| **22.** | $y = \frac{1}{4}(x-2)^2$ | $x - 2y + 10 = 0$ |
| **23.** | $y = \frac{1}{4}(x-3)^2$ | $x - 2y + 9 = 0$ |
| **24.** | $y = \frac{1}{4}(x-4)^2$ | $x - 2y + 8 = 0$ |
| **25.** | $y = \frac{1}{4}(x-5)^2$ | $x - 2y + 7 = 0$ |
| **26.** | $y = \frac{1}{3}(x-1)^2$ | $2x - y - 2 = 0$ |
| **27.** | $y = \frac{1}{3}(x-2)^2$ | $2x - y - 4 = 0$ |
| **28.** | $y = \frac{1}{3}(x+3)^2$ | $2x - y + (-6) = 0$ |
| **29.** | $y = \frac{1}{3}(x-4)^2$ | $2x - y - 8 = 0$ |
| **30.** | $y = \frac{1}{3}(x-5)^2$ | $2x - y - 10 = 0$ |

## ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Комплексна контрольна робота розроблена з метою перевірки рівня знань та вмінь студентів після завершення вивчення курсу «Вища математика».

Зміст завдань комплексної контрольної роботи дозволяє викладачеві перевірити рівень засвоєння теоретичного матеріалу та сформованості набутих практичних навиків.

На виконання комплексної контрольної роботи відводиться 80 хвилин.

*Перший рівень* включає 6 завдань тестового характеру, де необхідно обрати правильну відповідь (яких може бути ОДНА або ДВІ) з чотирьох запропонованих. Кожна правильна відповідь оцінюється 3 балами (у випадку двох правильних відповідей кожна з них оцінюється по 1,5 балу). На виконання завдань першого рівня відводиться 20 хвилин.

До *другого рівня* віднесено 3 завдання, кожне з яких оцінюється в 5 балів; на виконання відводиться 40 хв.

Для виконання завдань *третього рівня* складності виділяється 20 хв.; запропоновано для розв'язування 1 завдання, яке оцінюється в 7 балів.

Таким чином, студент має можливість отримати оцінку **«5 (*відмінно*)» набравши 37 - 40** балів; **«4 (*добре*)» - 29 - 36** балів; **«3 (*задовільно*)» - 21 – 28** балів; «**2 (*незадовільно*)» – 0 – 20** балів.

## КОМПЛЕКСНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА
**з дисципліни «Вища математика»**

---

### Варіант 1

***І рівень*** **(за кожну правильну відповідь – 3 бали; у випадку двох правильних відповідей кожна з них оцінюється по 1,5 балу). Час виконання – 20 хв.**

Завдання 1-6 мають по чотири варіанти відповідей, із яких одна або дві правильні. Виберіть правильну відповідь і зазначте її код.

**1.** Схематичне відображення вигляду об’єкту, яке дозволяє ділянки земної поверхні зображати на папері у зменшеному вигляді – це...:

1) відсоток; 2) математична модель;
3) масштаб; 4) графік.

**2.** Обчислення визначника ІІІ-го порядку за елементами третього стовпця можемо виконати з використанням таких дій:

а) за формулою $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ обчислюємо алгебраїчні доповнення до кожного елемента третього стовпця;
б) кожен елемент третього стовпця множимо на значення відповідного алгебраїчного доповнення;
в) записуємо суму добутків кожного елементу третього стовпця на відповідне алгебраїчне доповнення;
г) знаходимо значення суми;
д) записуємо відповідь.

Виберіть такий порядок виконання дій, який займає найменшу площу при записі.

1) а, б, в, г, д; 2) в, а, б, г, д;

3) б, в, а, г, д; 4) б, а, в, г, д.

**3.** Границя відношення прирості функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля (якщо ця границя існує), називається:

1) інтегралом функції; 2) первісною функції;
3) диференціалом функції; 4) похідною функції.

**4.** Серед запропонованих означень виберіть те, що визначає зростаючу функцію:

1) функція $y = f(x)$ називається зростаючою, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції;

2) функція $y = f(x)$ називається зростаючою, якщо меншому значенню аргументу відповідає більше значення функції;

3) функція $y = f(x)$ називається зростаючою, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції;

4) функція $y = f(x)$ називається зростаючою, якщо меншому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

**5.** Схема дослідження функції на максимум (за допомогою першої похідної) містить такі кроки:

а) знайти область допустимих значень;
б) розбити ОДЗ на проміжки;
в) знайти критичні точки функції;
г) знайти похідну функції;
д) знайти знак похідної на кожному з проміжків;
е) знайти максимальне значення функції;
є) визначити точки максимуму;
ж) записати відповідь.

Оберіть варіант відповіді, що містить правильну комбінацію запропонованих кроків.

1) а,д,г,в,б,є,е,ж; 2) а,в,б,г,д,є,е,ж;
3) а,г,в,б,д,є,е,ж; 4) а,б,г,д,в,е,є,ж.

**6.** Відстань між двома точками на площині обчислюється за допомогою формули:

1) $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ ;

2) $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ;

3) $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ ;

4) $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ .

***II рівень*** **(за кожну правильну відповідь – 5 балів). Час виконання – 40 хв.**

**7.** Запишіть рівняння площини, що проходить через точки $A(1;-3;2), B(3;2;5), C(-2;0;-1)$.

**8.** Обчисліть границю функції в точці: $\lim\limits_{x \to 2}(5x^3 - 6x^2 + x - 5)$.

**9.** Обчисліть $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx$ .

***III рівень*** **(за правильну відповідь – 7 балів). Час виконання – 20 хв.**

**10.** Дослідіть можливість використання розв'язків системи $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 + 3x_3 = 2 \end{cases}$, знайдених матричним методом, для формулювання деякої економічної задачі, де $x_1, x_2, x_3 -$кількість виготовленої продукції.

**Критерії оцінювання:**

**„5"** – *37-40 балів*
**„4"** – *29-36 балів*
**„3"** – *21-28 балів*
**„2"** – *0-20 балів*

**Викладач**
**Зоряна ЧУХРАЙ**

## КОМПЛЕКСНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА
**з дисципліни «Вища математика»**

---

### Варіант 2

***І рівень*** **(за кожну правильну відповідь – 3 бали; у випадку двох правильних відповідей кожна з них оцінюється по 1,5 балу).**

Завдання 1-6 мають по чотири варіанти відповідей, із яких одна або дві правильні. Виберіть правильну відповідь і зазначте її код.

**1.** Яка подвійна нерівність зв'язує середнє арифметичне з середнім геометричним та середнім квадратичним?

1) $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \le \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \le \sqrt{\dfrac{1}{n}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)}$ ;

2) $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} < \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} < \sqrt{\dfrac{1}{n}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)}$ ;

3) $\sqrt{\dfrac{1}{n}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)} \le \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \le \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$ ;

4) $\sqrt{\dfrac{1}{n}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)} < \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} < \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$ .

**2.** Якщо скласти алгоритм розв'язання СЛАР ІІІ-го порядку методом Крамера, то він міститиме такі кроки:

а) записати та обчислити визначники третього порядку, що утворюються шляхом заміни відповідного стовпця коефіцієнтів стовпцем вільних членів;

б) записати та обчислити визначник третього порядку, що складається із коефіцієнтів біля невідомих даної СЛАР;

в) використовуючи відношення, які називаються формулами Крамера, знайти значення невідомих;

г) підставити отримані значення невідомих у вихідну систему;

д) записати відповідь.

Розташуйте дані кроки так, щоб утворений ними алгоритм був найточнішим.

1) б, а, в, г, д; 2) б, а, в, д, г;
3) б, а, д, в, г; 4) а, б, в, г, д.

**3.** Якщо для будь-якого $x$ з ОДЗ функції $y = f(x)$ число $(-x)$ також належить ОДЗ і виконується рівність $f(-x) = -f(x)$, то функція називається:

1) оберненою пропорційністю; 2) парною;
3) непарною; 4) протилежною.

**4.** Щоб знайти похідну функції $y = f(x)$ в точці $x_0 \in (a;b)$ необхідно виконати певні кроки:

а) знайти значення функції $f(x_0 + \Delta x)$;

б) знайти значення $f(x_0)$;

в) скласти відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y};$$

г) надати точці $x_0$ деякого, як додатного так і від'ємного, приросту $\Delta x$, але такого, щоб точка $x_0 + \Delta x \in (a;b)$;

д) знайти границю відношення приросту функції до приросту аргументу при умові, що $\Delta x \to 0$;

е) знайти приріст функції $y = f(x)$ в точці $x_0$:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0);$$

є) записати відповідь.

Виберіть той варіант відповіді (відповідей), який, на вашу думку, є правильним.

1) г,б,а,е,в,д,є; 2) а,г,б,д,в,е,є;
3) б,г,а,е,в,д,є; 4) е,г,б,в,д,а,є.

**5.** Множина точок площини, відстані від яких до заданої точки площини дорівнюють сталому числу називається:

1) еліпсом; 2) параболою;
3) колом; 4) гіперболою.

**6.** Вираз $S(A) = \lim_{\Delta h_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} y(x_i^*)\Delta x_i$ називається:

1) інтегральною сумою; 2) визначеним інтегралом;
3) гранична сума; 4) невизначений інтеграл.

***ІІ рівень*** **(за кожну правильну відповідь – 5 балів). Час виконання – 40 хв.**

**7.** Обчисліть визначник третього порядку $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 0 \end{vmatrix}$.

**8.** Запишіть рівняння гіперболи, якщо довжина її дійсної осі дорівнює 12, а відстань між фокусами 20.

**9.** Який коефіцієнт розміщений біля невідомої в найвищому степені у виразі, що є похідною функції $y = (x^3 - 1)(x^2 + x + 1)$?

***ІІІ рівень*** **(за правильну відповідь – 7 балів). Час виконання – 20 хв.**

**10.** Дано рівняння $y' = 4x + 1$. Розв’яжіть рівняння. Знайдіть розв’язок, що задовольняє початкову умову $y(2) = 1$. Із сукупності розв’язків даного рівняння виділіть той, графік якого проходить через точку (2;0).

**Критерії оцінювання:**

**„5”** – *37-40 балів*
**„4”** – *29-36 балів*
**„3”** – *21-28 балів*
**„2”** – *0-20 балів*

**Викладач**
**Зоряна ЧУХРАЙ**

## КОМПЛЕКСНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА
**з дисципліни «Вища математика»**

---

### Варіант 3

***I рівень*** **(за кожну правильну відповідь – 3 бали; у випадку двох правильних відповідей кожна з них оцінюється по 1,5 балу).**
Завдання 1-6 мають по чотири варіанти відповідей, із яких одна або дві правильні. Виберіть правильну відповідь і зазначте її код.

**1.** Кількість грошей, інвестованих або взятих у позику:

1) прибуток; 2) основна сума;
3) майбутня вартість; 4) поточна вартість.

**2.** Вкажіть той порядок дій, який найточніше описує процес множення матриць $B \cdot A$:

а) записати матриці у порядку, вказаному в умові задачі ( $AB$ чи $BA$ );
б) знайти суму добутків відповідних елементів першого рядка матриці $B$ та другого стовпця матриці $A$ і отриманий результат записати на місце елементу $c_{12}$ нової матриці C;
в) знайти суму добутків відповідних елементів першого рядка матриці $B$ та першого стовпця матриці $A$ і отриманий результат записати на місце елементу $c_{11}$ нової матриці C;
г) елементи другого (третього) рядка матриці $C = BA$ знаходимо як суму добутків елементів другого (третього) рядка матриці $B$ на відповідні елементи трьох стовпців матриці $A$ ;
д) знайти суму добутків відповідних елементів першого рядка матриці $B$ та третьогостовпця матриці $A$ і отриманий результат записати на місце елементу $c_{13}$ нової матриці C;
е) записуємо відповідь.

1) а, б, в, г, д, е; 2) а, в, б, г, д;
3) а, в, б, д, г, е; 4) а, б, д, в, г, е.

**3.** Функція називається складеною (функцією від функції), якщо:

1) змінна $y$ залежить від іншої змінної $u$ , яка, в свою чергу, є функцією від $x$ ;
2) змінна $y$ залежить від величини $x$ , яка належить множині $X$ ;
3) змінна $y$ залежить від іншої змінної величини $u$ ;
4) змінна $y$ залежить від іншої змінної $u$ , яка, в свою чергу, є функцією від $y$ .

**4.** Щоб дослідити функцію $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ на мінімум необхідно виконати кроки, перелік яких розміщено нижче. Виберіть ту комбінацію із запропонованих, яка, на вашу думку, є схемою даного дослідження:

а) знайти область допустимих значень, тобто накласти умову

$$x^2 - 4 \neq 0;$$

б) розбити ОДЗ статистичними точками на проміжки;

в) знайти статистичні точки функції;

г) знайти першу похідну функції, використовуючи формулу для обчислення похідної частки;

д) знайти знак першої похідної на кожному з проміжків;

е) знайти значення функції в точках мінімуму;

є) визначити точки, при переході через які похідна змінює знак з мінуса на плюс;

ж) записати відповідь.

1) а,в,б,г,д,є,е,ж; 2) а,г,в,б,д,є,е,ж;

3) а,б,г,д,в,е,є,ж; 4) а,д,г,в,б,є,е,ж.

**5.** Дано рівняння $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Це:

1) рівняння площини, що проходить через дану точку, перпендикулярно до даного вектора;

2) рівняння прямої, що проходить через дану точку, перпендикулярно до даного вектора;

3) канонічне рівняння площини;

4) параметричне рівняння прямої.

**6.** Встановіть, яка формула використовується для обчислення визначеного інтеграла:

1) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(a) - F(b);$

2) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a);$

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(a) - F(b);$

4) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$

***ІІ рівень*** **(за кожну правильну відповідь – 5 балів). Час виконання – 40 хв.**

**9.** Знайдіть значення мінору $M_{12}$ визначника $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

**10.** Запишіть рівняння прямої, що проходить через точки $A(-4;3), B(1;-5)$.

**11.** Знайти значення похідної функції $y = (9 - x^2)^4$ в точці $x_0 = 2$.

***ІІІ рівень*** **(за правильну відповідь – 7 балів). Час виконання – 20 хв.**

**13.** Дослідіть, чи є функція $y = F(x)$ первісної функції $y = f(x)$ на заданому проміжку, якщо $F(x) = 3\sqrt[3]{x} + 5$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$; $0 < x < +\infty$.

**Критерії оцінювання:**

**„5”** – *37-40 балів*
**„4”** – *29-36 балів*
**„3”** – *21-28 балів*
**„2”** – *0-20 балів*

**Викладач**
**Зоряна ЧУХРАЙ**

## КОМПЛЕКСНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА
### з дисципліни «Вища математика»

---

### Варіант 4

***I рівень*** **(за кожну правильну відповідь – 3 бали; у випадку двох правильних відповідей кожна з них оцінюється по 1,5 балу).**

Завдання 1-6 мають по чотири варіанти відповідей, із яких одна або дві правильні. Виберіть правильну відповідь і зазначте її код.

**1.** Щоб знайти обернену матрицю до даної матриці $A$, необхідно виконати такі операції:

а) записати союзну матрицю $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$;

б) обчислити алгебраїчні доповнення $A_{ij}$ всіх елементів даної матриці;

в)обчислити визначник $\Delta(A)$ даної матриці;

г) записати обернену матрицю за формулою $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta(A)} \cdot \widetilde{A}$;

д) записати відповідь;

е) виконати перевірку $A^{-1} \cdot A = E$.

Дослідіть найраціональнішу комбінацію дій.

1) б, а, в, г, д, е; 2) в, б, а, г, е, д;
3) в, а, б, г, е, д; 4) в, б, а, г, д, е.

**2.** Серед запропонованих способів виберіть ті, які можна використати для задання функції:

1)графічно; 2) наочно;
3)аналітично; 4) письмово.

**3.** Еластичність функції це:

1) границя відношення приросту функції до приросту аргументу при умові, що приріст аргументу прямує до нуля, тобто

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x};$$

2) границя відношення відносного приросту функції $y$ до відносного приросту змінної $x$ при умові, що приріст $\Delta x \to 0$,

тобто $E_x(y) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{\Delta y}{y} \div \dfrac{\Delta x}{x}\right)$;

3) границя відношення відносного приросту змінної $x$ до відносного приросту функції $y$ при умові, що приріст $\Delta x \to 0$,

тобто $E_x(y) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{\Delta x}{x} \div \dfrac{\Delta y}{y}\right)$;

4) границя відношення відносного приросту функції $y$ до відносного приросту змінної $x$ при умові, що приріст $\Delta y \to 0$,

тобто $E_x(y) = \lim\limits_{\Delta y \to 0}\left(\dfrac{\Delta y}{y} \div \dfrac{\Delta x}{x}\right)$.

**4.** Дослідження функції на опуклість проводимо так:

а) знайти ОДЗ;
б) знайти нулі функції;
в) розбити ОДЗ на проміжки;
г) знайти другу похідну функції $y'' = f''(x)$;
д) зробити висновок про інтервали опуклості;
е) дослідити знак другої похідної на кожному з проміжків;
є) записати відповідь.

Вкажіть правильну послідовність кроків.

1) б,а,г,е,д,в,є; 2)в,г,а,б,е,д,є;
3) а,б,г,д,в,е,є; 4) а,г,б,в,е,д,є.

**5.** Дано рівняння $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{в^2} = 1$. Це

1) рівняння кола з центром в довільній точці;
2) рівняння еліпса з центром в довільній точці;
3) рівняння гіперболи з центром в довільній точці;
4) рівняння еліпса з центром в початку координат.

**6.** Які із властивостей справджуються для визначеного інтеграла:

1) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0;$

2) $\int\limits_a^b cf(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$, c = *const;*

3) $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$;

4) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_b^a f(x)dx$.

***II рівень*** **(за кожну правильну відповідь – 5 балів). Час виконання – 40 хв.**

**7.** Запишіть значення елементу $c_{11}$ матриці $C = 3A - 2B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

**8.** Запишіть канонічне рівняння прямої у просторі, якщо дано довільну точку (-2;3;0) та напрямний вектор з координатами (5;-1;-2).

**9.** Обчисліть визначений інтеграл $\int\limits_{-1}^{0} xe^{2x}dx$.

***III рівень*** **(за правильну відповідь – 7 балів). Час виконання – 20 хв.**

**10.** Дослідіть на максимум та мінімум функцію $y = x\sqrt{1 - x^2}$.

**Критерії оцінювання:**

**„5”** – *37-40 балів*
**„4”** – *29-36 балів*
**„3”** – *21-28 балів*
**„2”** – *0-20 балів*

**Викладач**
**Зоряна ЧУХРАЙ**

## КОМПЛЕКСНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА
### з дисципліни «Вища математика»

---

### Варіант 5

***І рівень*** **(за кожну правильну відповідь – 3 бали; у випадку двох правильних відповідей кожна з них оцінюється по 1,5 балу).**

Завдання 1-6 мають по чотири варіанти відповідей, із яких одна або дві правильні. Виберіть правильну відповідь і зазначте її код.

**1.** Вкажіть, як називається множина, яка складається із скінченої кількості елементів:

1) нескінченною; 2) скінченою;
3) одноелементною; 4) порожньою.

**2.** Виберіть комбінацію, що відповідає алгоритму, який містить найповнішу кількість кроків, спрямованих на розв'язання СЛАР матричним способом:

а) записати систему у матричному вигляді $A \cdot X = B$;

б) розв'язати СЛАР, використовуючи формулу $X = A^{-1} \cdot B$;

в) підставити отримані значення невідомих у вихідну систему;

г) знайти для даної матриці обернену за допомогою формули

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \cdot \widetilde{A};$$

д) записати відповідь.

1) а, г, б, в; 2) а, б, г, в, д;
3) а, г, б, д; 4) а, г, б, в, д.

**3.** Областю визначення функції $y = f(x)$ називається:

1) множина значень, яких набуває незалежна змінна $y$;

2) множина відповідних значень залежної змінної $y$, яких вона набуває при всіх значеннях $x$;

3) множина значень, яких набуває незалежна змінна $x$;

4) множина відповідних значень залежної змінної $x$, яких вона набуває при всіх значеннях $y$.

**4.** Точки перегину графіка функції можна визначити послідовно:

а) знайти ОДЗ;

б) дослідити знак другої похідної на кожному з проміжків;

в) визначити точки перегину;

г) розбити ОДЗ на проміжки;
д) знайти другу похідну функції $y'' = f''(x)$;
е) знайти нулі функції;
є) записати відповідь.

Виберіть той варіант відповіді, де вказана правильна послідовність.

1) а,д,е,г,б,в,є; 2) б,а,г,е,д,в,є;
3) в,г,а,б,е,д,є; 4) а,б,г,д,в,е,є.

**5.** Рівняння площини у відрізках має вигляд:

1) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$;
2) $Ax + By + Cz + D = 0$;
3) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$;
4) $\frac{x}{a} + \frac{y}{в} = 1$.

**6**. Визначіть, яка із запропонованих формул допомагає обчислити інтеграл по частинах:

1) $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b udv$;
2) $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$;
3) $\int_a^b vdu = uv\Big|_a^b - \int_a^b udv$;
4) $\int_a^b vdu = vu\Big|_a^b - \int_a^b vdu$.

***ІІ рівень*** **(за кожну правильну відповідь – 5 балів). Час виконання – 40 хв.**

**7.** Для даної системи лінійних алгебраїчних рівнянь $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$ знайдіть значення величини $\Delta x_2$.

**8.** Знайдіть значення кута між прямими $3x - 4y + 5 = 0$ і $3x + 4y - 9 = 0$.

**9.** Обчисліть границю функції: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$.

***III рівень*** **(за правильну відповідь – 7 балів). Час виконання – 20 хв.**

**10.** Знайдіть розв'язок диференціального рівняння $y' = 2 + \sin x$, який задовольняє умову $y(0) = 1$.

**Критерії оцінювання:**

**„5"** – *37-40 балів*
**„4"** – *29-36 балів*
**„3"** – *21-28 балів*
**„2"** – *0-20 балів*

**Викладач**
**Зоряна ЧУХРАЙ**

## КОМПЛЕКСНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА
### з дисципліни «Вища математика»

---

### Варіант 6

***І рівень*** **(за кожну правильну відповідь – 3 бали; у випадку двох правильних відповідей кожна з них оцінюється по 1,5 балу).**
Завдання 1-6 мають по чотири варіанти відповідей, із яких одна або дві правильні. Виберіть правильну відповідь і зазначте її код.

**1.** Вкажіть той порядок виконання запропонованих кроків, який є найефективнішим при обчисленні рангу матриці методом обрамлення:

а) якщо всі мінори першого порядку (елементи матриці $A$) дорівнюють нулю, то $r(A)=0$;

б) якщо всі мінори другого порядку дорівнюють нулю, то $r(A)=1$;

в) продовжуємо доти, поки або всі мінори порядку $k$ дорівнюють нулю, або мінорів порядку $k$ не існує, тоді $r(A)=k-1$;

г) якщо хоч один з мінорів першого порядку відмінний від нуля, то записуємо мінори другого порядку, починаючи від верхнього лівого кута;

д) якщо хоч один з мінорів другого порядку відмінний від нуля, то досліджуємо всі мінори третього порядку, які містять відмінний від нуля мінор другого порядку;

е) записуємо відповідь.

1) а, г, б, д, в, е; 2) а, г, д, б, в, е;
3) г, а, д, б, в, е; 4) г, а, б, д, в, е.

**2.** Що називається ставкою дисконту:

1) відсоток від загальної суми;
2) величина грошей, яку треба сплатити за користування грошима;
3) виручена сума;
4) число конверсійних періодів за рік.

**3.** Похідна складеної функції $y=f(u)$, де $u=g(x)$, дорівнює:

1) добутку похідної внутрішньої функції на похідну зовнішньої функції;
2) добутку похідної зовнішньої функції на похідну внутрішньої функції;
3) добутку цих функцій;
4) добутку похідної зовнішньої функції на внутрішню функцію.

**4.** Для того, щоб дослідити функцію $y = f(x)$ на найбільше та найменше значення на відрізку $[a;b]$ необхідно скористатися такими кроками:

а) знайти критичні точки функції, в яких похідна дорівнює нулю або не існує;

б) обчислити $f'(x)$;

в) вибрати серед обчислених значень найбільше та найменше;

г) обчислити значення даної функції в критичних точках та на кінцях відрізку;

д) записати відповідь.

Вкажіть правильну послідовність виконання кроків:

1) г, а, в, б, д; 2) в, а, г, б, д;
3) б, а, в, г, д; 4) б, в, г, а, д.

**5**. Нормальним вектором прямої називається:

1) довільний ненульовий вектор, який перпендикулярний до даної прямої;

2) довільний ненульовий вектор, який перпендикулярний до площини;

3) довільний ненульовий вектор, який паралельний до даної прямої;

4) довільний вектор, який перпендикулярний до даної прямої.

**6.** Вкажіть, за допомогою якої формули можна обчислити об'єм тіла обертання::

1) V=$\pi\int_a^b f(x)dx$; 2) V=$\pi\int_a^b f^2(x)dx$;

3) V=$\pi^2\int_a^b f(x)dx$; 4) V=$\int_a^b \pi f^2(x)dx$.

***II рівень*** **(за кожну правильну відповідь – 5 балів). Час виконання – 40 хв.**

**7.** Знайдіть значення визначника матриці $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

**8.** Дано вершини трикутника $A(2;-2), B(-2;5), C(2;-7)$. Знайдіть довжини всіх сторін трикутника.

**9.** Обчисліть повний диференціал функції $z = e^{xy}$.

***III рівень*** **(за правильну відповідь – 7 балів). Час виконання – 20 хв.**

**10.** Зобразіть криволінійну трапецію, площа якої обчислюється за формулою $\int_0^1 (x^2 + 1)dx$. Чому дорівнює шукана площа?

**Критерії оцінювання:**

**„5”** – *37-40 балів*
**„4”** – *29-36 балів*
**„3”** – *21-28 балів*
**„2”** – *0-20 балів*

**Викладач**
**Зоряна ЧУХРАЙ**

## КОМПЛЕКСНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА
**з дисципліни «Вища математика»**

---

### Варіант 7

***І рівень*** **(за кожну правильну відповідь – 3 бали; у випадку двох правильних відповідей кожна з них оцінюється по 1,5 балу).**

Завдання 1-6 мають по чотири варіанти відповідей, із яких одна або дві правильні. Виберіть правильну відповідь і зазначте її код.

**1.** У чому полягає суть нарахування складних відсотків?

1) через певний обумовлений час необхідно сплатити капітал без прибутку з нього;
2) через певний час треба сплатити початкову вартість;
3) ставка процента береться від величини, що дорівнює початковій вартості;
4) ставка процента береться від величини, що дорівнює початковій вартості плюс проценти.

**2.** Для знаходження координат добутку $\left[\overline{a} \times \overline{b}\right]$ двох векторів $\overline{a}(x_1, y_1, z_1)$ та $\overline{b}(x_2, y_2, z_2)$необхідно виконати дії у такій послідовності:

а) перший рядок – це одиничні вектори, наступні – відповідні координати векторів;
б) обчислюємо методом трикутника або розкладом за елементами першого рядка;
в) зводимо подібні доданки і отримаємо координати векторного добутку – коефіцієнти біля одиничних векторів;
г) складаємо визначник певного порядку;
д) записуємо відповідь згідно умови завдання.

1) а, б, в, г, д; 2) б, а, в, д, г;
3) г, а, б, в, д; 4) в, а, г, д, б.

**3.** Граничними витратами виробництва називається границя виду:

1) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta K(x)}{\Delta x} = K'(x)$; 2) $\lim\limits_{\Delta x \to \infty} \dfrac{\Delta K(x)}{\Delta x} = K'(x)$;

3) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta K(x)} = K'(x)$; 4) $\lim\limits_{\Delta x \to \infty} \dfrac{\Delta x}{\Delta K(x)} = K'(x)$.

**4.** Щоб дослідити функцію на опуклість та точки перегину необхідно скористатись алгоритмом, що містить перелік кроків:

а) розбити ОДЗ функції критичними точками на проміжки;

б) знайти другу похідну функції;

в) знайти ОДЗ;

г) знайти точки, в яких $f''(x)=0$ або не існує;

д) дослідити знак другої похідної на кожному з утворених проміжків і зробити висновок про інтервали опуклості та наявність точок перегину;

е) знайти значення функції в точках перегину;

є) записати відповідь.

Вкажіть той варіант відповіді, що визначає алгоритм виконання даного завдання.

1) а, г, в, д, б, е, є; 2) в, б, г, а, д, е, є;

3) в, г, а. д, б, е, є; 4) б, г, а. в, д, е, є.

**5.** Кут між двома площинами обчислюється за формулою:

1) $\sin\varphi = \dfrac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$;

2) $\cos\varphi = \dfrac{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}{|\overline{n_1}|\cdot|\overline{n_2}|}$;

3) $\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$;

4) $\cos\alpha = \dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$.

**6.** Серед запропонованих варіантів виберіть формулу інтегрування за допомогою підстановки, яку можна використати для інтегрування функції $f(x)$ при умові, що $x=g(t)$:

1) $\int f(x)dx = \int f(g(t))\times g'(t)dt$;

2) $\int f(x)dx = \int f(g(x))\times g'(x)dx$;

3) $\int f(x)dx = \int f(g(t))dt$;

4) $\int f(x)dx = \int f(g'(t))dt$.

***II рівень*** **(за кожну правильну відповідь – 5 балів). Час виконання – 40 хв.**

**7.** Дослідіть, скільки елементів містить множина, задана за допомогою характеристичної властивості $C = \{x / x \in Z, -3 < x < 7\}$.

**8.** За допомогою векторної алгебри знайдіть довжину ребра $AB$, якщо $A(1;1;1)$, $B(7;5;6)$.

**9.** Дослідіть, чи є функція $y = F(x)$ первісної функції $y = f(x)$ на всій числовій прямій, якщо $F(x) = \sin x \cos x$; $f(x) = \cos 2x$.

***III рівень*** **(за правильну відповідь – 7 балів). Час виконання – 20 хв.**

**10.** Дослідіть, чи має функція $y = x^6 - 6x^5 + \frac{15}{2}x^4 + 3x$ в точці $x = 0$ перегин. Визначте проміжки вгнутості та опуклості функції.

**Критерії оцінювання:**

**„5”** – *37-40 балів*
**„4”** – *29-36 балів*
**„3”** – *21-28 балів*
**„2”** – *0-20 балів*

**Викладач**
**Зоряна ЧУХРАЙ**

## КОМПЛЕКСНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА
**з дисципліни «Вища математика»**

---

### Варіант 8

***I рівень*** **(за кожну правильну відповідь – 3 бали; у випадку двох правильних відповідей кожна з них оцінюється по 1,5 балу).**

Завдання 1-6 мають по чотири варіанти відповідей, із яких одна або дві правильні. Виберіть правильну відповідь і зазначте її код.

**1.** Якщо кількість стовпців однієї матриці дорівнює кількості рядків іншої, то такі матриці називаються...:

1) рівними; 2) союзними;
3) узгодженими; 4) еквівалентними.

**2.** Обчислити визначник третього порядку можна за допомогою перерахованих нижче дій. Оберіть той варіант відповіді, що містить найточніший алгоритм виконання даного завдання.

а) обчислюємо суму добутків елементів за схемою:

$$\begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix}$$

б) знаходимо суму добутків елементів визначника так, як ілюструє дана схема:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix}$$

в) записуємо відповідь;

г) утворюємо різницю між сумами добутків визначників та проводимо необхідні обчислення.

1) а, б, г, в; 2) б, а, г, в;
3) а, б, в, г; 4) в, г, а, б.

**3.** Для границі функції в точці справедливими є ряд теорем. Виберіть їх із числа запропонованих.

1) $\lim\limits_{x \to a}\left(C \cdot f(x)\right) = C \lim\limits_{x \to a} f(x)$;

2) $\lim\limits_{x \to a}\left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\big(C\cdot f(x)+g(x)\big)=C\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)+g(x)\big)$;

4) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-C\cdot g(x))=C\lim\limits_{x\to a}f(x)-C\lim\limits_{x\to a}g(x)$.

**4.** Щоб провести повне дослідження функції та побудувати її графік треба виконати такі кроки:

а) знайти ОДЗ;
б) знайти точки розриву і вертикальні асимптоти;
в) знайти екстремуми і інтервали монотонності функції;
г) дослідити функцію на парність та непарність;
д) знати інтервали опуклості та точки перегину функції;
е) дослідити поведінку функції на нескінченності, знайти горизонтальні та похилі асимптоти;
є) за допомогою проведених кроків побудувати графік.

Вкажіть той варіант відповіді, що містить найраціональнішу послідовність розв’язання даного завдання.

1) а, г, б, е, в, д, є; 2) а, б, е, д, г, в, є;
3) а, в, г, д, е, б, є; 4) а, е, б, г, в, д, є.

**5.** Загальне рівняння прямої має вигляд:

1) $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$;

2) $Ax+By+C=0$;

3) $Ax+By+Cz+D=0$;

4) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

**6.** Якщо область обмежена графіком функції $y=f(x)$, віссю Ох та прямими $x=a, x=b$ і розміщена у 3-4 чверті ,то її площа обчислюється за формулою:

1) $S=-\int\limits_a^b f(x)dx$; 2) $S=\int\limits_a^b f(x)dx$;

3) $S=-\int\limits_b^a f(x)dx$; 4) $S=-\int\limits_a^a f(x)dx$.

**II рівень (за кожну правильну відповідь – 5 балів). Час виконання – 40 хв.**

**7.** Скільки двоцифрових чисел можна записати, якщо цифри їх десятків належать множині $A=\{2;6;1\}$, а цифри одиниць – множині $B=\{5;0\}$?

**8.** Знайдіть значення мішаного добутку векторів $\overline{a} = 4\overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}$, $\overline{b} = -\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{c} = 3\overline{i} - \overline{j} + 5\overline{k}$.

**9.** Обчисліть визначений інтеграл частинами $\int_1^2 x^2 \ln x dx$.

***ІІІ рівень*** **(за правильну відповідь – 7 балів). Час виконання – 20 хв.**

**10.** Обчислити частинні похідні першого та другого порядку від функції $z = \sin^2(x + 2y)$.

**Критерії оцінювання:**

**„5”** – *37-40 балів*
**„4”** – *29-36 балів*
**„3”** – *21-28 балів*
**„2”** – *0-20 балів*

**Викладач**
**Зоряна ЧУХРАЙ**

# КОМПЛЕКСНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА
**з дисципліни «Вища математика»**

---

## Варіант 9

***І рівень*** **(за кожну правильну відповідь – 3 бали; у випадку двох правильних відповідей кожна з них оцінюється по 1,5 балу).**

Завдання 1-6 мають по чотири варіанти відповідей, із яких одна або дві правильні. Виберіть правильну відповідь і зазначте її код.

**1.** Для операції множення матриць справедливою є властивість:

1) $AB \neq BA$;　　2) $AB = BA$;

3) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;　　4) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

**2.** Встановіть, який перелік кроків із запропонованих найповніше описує процес знаходження кута між двома векторами, що задані координатами:

а) записуємо відповідь;

б) складаємо відношення скалярного добутку до добутку норм векторів;

в) обчислюємо норми векторів як корінь квадратний із суми квадратів координат певного вектора;

г) використовуючи обернено тригонометричну функцію, знаходимо значення кута між векторами;

д) обчислюємо скалярний добуток заданих векторів, що дорівнює сумі добутків відповідних координат.

1) в, б, а, г, д;　　2) д, б, в, а, г;

3) а, д, г, б, в;　　4) д, в, б, г, а.

**3.** Виробничими функціями називаються:

1) функції, в яких задається відповідність між величинами, що характеризують хід конкретного процесу чи явища певного господарства;

2) функції, що характеризують хід конкретного процесу чи явища у певному господарстві;

3) функції, в яких задається відповідність між відомими величинами;

4) функції, в яких задається відповідність між конкретними явищами.

**4.** Нехай функція $z = f(x;y)$ має неперервні частинні похідні першого та другого порядку, причому $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = 0$ та $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = 0$, а також $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)} = A$, $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = B$, $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)} = C$. Виконання яких умов вказує на необхідність додаткових досліджень для визначення екстремуму функції двох змінних?

1) $\Delta = AC - B^2 > 0$, і $A < 0$;
2) $\Delta = AC - B^2 > 0$, і $A > 0$;
3) $\Delta = AC - B^2 = 0$;
4) $\Delta = AC - B^2 < 0$.

**5.** Яке рівняння задає параболу з центром в початку координаті вітками, що симетричні осі $Ox$ :

1) $x^2 = 2py$; 2) $x^2 = -2py$;
3) $y^2 = 2px$; 4) $y^2 = -2px$.

**6.** Якщо область обмежена графіком функцій $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ (причому $f_2(x) > f_1(x)$) і прямими $x = a, x = b$,то її площа обчислюється за формулою:

1) $S = \int_a^b f(x)dx$;
2) $S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx$;
3) $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$;
4) $S = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx$.

***II рівень*** **(за кожну правильну відповідь – 5 балів). Час виконання – 40 хв.**

**7.** Знайти проекцію вектора $\overline{a}(3;0;-3)$ на вектор $\overline{b}(3;0;-4)$.

**8.** Обчислити похідну функції: $y = (x^3 - 1)(x^2 + x + 1)$.

**9.** Чи є первісними однієї і тієї самої функції такі функції: $y = 2^{x-1}$ і $y = 2^x - 1$? Відповідь обґрунтуйте.

***III рівень*** **(за правильну відповідь – 7 балів). Час виконання – 20 хв.**

**10.** Дослідіть можливість використання розв'язків системи $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -6 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 20 \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = -12 \end{cases}$, знайдених методом Гаусса, для формулювання деякої економічної задачі, де $x_1, x_2, x_3$ – кількість виготовленої продукції.

**Критерії оцінювання:**

**„5”** – *37-40 балів*
**„4”** – *29-36 балів*
**„3”** – *21-28 балів*
**„2”** – *0-20 балів*

**Викладач**
**Зоряна ЧУХРАЙ**

## КОМПЛЕКСНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА
### з дисципліни «Вища математика»

---

### Варіант 10

***І рівень*** **(за кожну правильну відповідь – 3 бали; у випадку двох правильних відповідей кожна з них оцінюється по 1,5 балу).**

Завдання 1-6 мають по чотири варіанти відповідей, із яких одна або дві правильні. Виберіть правильну відповідь і зазначте її код.

**1.** Вкажіть, який із записів відповідає алгебраїчному доповненню елемента $a_{12}$ визначника третього порядку:

1) $-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$; 2) $(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$;

3) $(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$; 4) $(-1)^{3}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

**2.** Обернену матрицю можна обчислити і за допомогою елементарних перетворень – для цього необхідно виконати певні кроки. Вкажіть правильний перелік даних кроків:

а) обчислення проводимо доти, доки на місці даної матриці опинилася одинична, а на місці одиничної –початкова матриця;

б) виконуючи прості лінійні операції над усіма рядками розгорнутої матриці проводимо необхідні перетворення;

в) складаємо розгорнуту матрицю, тобто таку, що містить запропоновану в умові завдання матрицю та одиничну матрицю порядку такого ж самого, як і порядок матриці;

г) записуємо відповідь.

1) а, б, в, г, д; 2) б, а. д, г;

3) в, б. а, г; 4) д, а, б, в, г.

**3.** Числовою послідовністю $\{x_n\}$ називають:

1) множину чисел $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, якщо кожному натуральному числу $n \in N$ за певним правилом ставиться у відповідність число $x_n$;

2) множину чисел $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, якщо кожному $n \in Z$ за певним правилом ставиться у відповідність число $x_n$;

3) множину чисел $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, якщо дійсному числу $n$ за певним правилом ставиться у відповідність число $x_n$;

4) множину чисел $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, якщо кожному числу $n \in R$ за певним правилом ставиться у відповідність число $x_n$.

**4.** Для того, щоб написати рівняння дотичної до функції $y = f(x)$ в точці $x_0$ необхідно, в певній послідовності, виконати такі кроки:

а) знайти похідну $y'$ функції $y = f(x)$;

б) знайти значення функції $f(x)$ точці $x_0$;

в) знайти значення похідної $y'$ в точці $x_0$;

г) записати рівняння дотичної.

Яка послідовність кроків, із запропонованих, є правильною?

1) а, б, в, г; 2) а, в, г, б;

3) б, а, в, г; 4) г, б, в, а.

**5.** Параметричні рівняння прямої у просторі:

1) $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$;

3) $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$; 4) $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n}$.

**6.** Якщо функція, графік якої обмежує площу ,задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$ ,то її площа обчислюється за формулою:

1) $S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(x)dt$; 2) $S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)x(t)dt$;

3) $S = \int\limits_{\beta}^{\alpha} y(t)x(t)dt$; 4) $S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)dt$.

***II рівень* (за кожну правильну відповідь – 5 балів). Час виконання – 40 хв.**

**9.** Обчисліть визначник $\begin{vmatrix} -6 & 2 & 5 \\ 10 & 0 & 7 \\ 8 & -5 & 0 \end{vmatrix}$.

**10.** Дано координати вершин трикутника ABC: $A(1;2;3)$, $B(3;2;1)$, $C(1;4;1)$. Обчисліть довжину медіани $BM$.

**11.** Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями
$y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3$.

***III рівень* (за правильну відповідь – 7 балів). Час виконання – 20 хв.**

**12.** Дослідити функцію $z = -800 - x^2 - y^2 + 40x + 60y$ на екстремум.

**Критерії оцінювання:**

**„5”** – *37-40 балів*
**„4”** – *29-36 балів*
**„3”** – *21-28 балів*
**„2”** – *0-20 балів*

**Викладач**
**Зоряна ЧУХРАЙ**

## КОМПЛЕКСНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА
### з дисципліни «Вища математика»

---

### Варіант 11

***I рівень*** **(за кожну правильну відповідь – 3 бали; у випадку двох правильних відповідей кожна з них оцінюється по 1,5 балу).**

Завдання 1-6 мають по чотири варіанти відповідей, із яких одна або дві правильні. Виберіть правильну відповідь і зазначте її код.

**1.** У матриці найбільший з порядків мінорів, відмінних від нуля називається:

1) алгебраїчне доповнення; 2) визначник;
3) ранг; 4) коефіцієнт системи.

**2.** Розв'язанню системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса (за допомогою елементарних перетворень) сприяє виконання таких кроків:

а) проводимо елементарні перетворення так, щоб нижче головної діагоналі утворилися нулі;

б) записуємо розгорнуту матрицю, що складається із матриці коефіцієнтів, які містяться біля невідомих;

в) рухаючись у зворотному напрямку, починаючи з останнього рівняння системи, знаходимо значення усіх невідомих;

г) записати отриману відповідь.

Розташуйте їх у порядку проведення та виберіть необхідну відповідь.

1) а, б, в, г; 2) б, а, в, г;
3) б, в, а, г; 4) а, в, г, б.

**3.** Другу визначну (чудову) границю можна записати у декількох варіантів. Виберіть правильні із запропонованих:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$; 2) $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$;

3) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=e$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$.

**4.** Для дослідження функції на екстремум можна використати другу похідну. У якій послідовності треба виконати перераховані нижче вказівки, щоб дослідити функцію на максимум та мінімум?

а) перевірити виконання другої достатньої ознаки екстремуму;
б) знайти екстремальні значення функції;
в) записати рівняння, корені якого є критичними точками функції;
г) підставити у $f''$ значення стаціонарних точок;
д) знайти похідну функції;
е) обчислити другу похідну;
є) записати відповідь.

1) д, е, а, в, б, г, є; 2) в, г, б, а, е, д, є;

3) а, г, б, в, д, е, є; 4) д, в, е, г, а, б, є.

**5.** Для еліпса справедлива рівність:

1) $c^2 = a^2 + в^2$; 2) $x = \pm\frac{a}{e}$;

3) $x = -\frac{p}{2}$; 4) $c^2 = a^2 - в^2$.

**6.** Вкажіть, за якою формулою обчислюється об'єм тіл обертання:

1) $V = \Pi\int_a^b f^2(x)dx$;

2) $V = \int_a^b f^2(x)dx$;

3) $V = \Pi\int_a^b f(x)dx$;

4) $V = -\Pi\int_a^b f^2(x)dx$.

***II рівень*** **(за кожну правильну відповідь – 5 балів). Час виконання – 40 хв.**

**7.** Якщо банк пропонує вексель із ставкою 12%, то дослідіть, у скільки обійдеться користування 6000 грн. протягом двох місяців?

**8.** Довжина вектора $\bar{a}$ дорівнює 10. Знайти кут $\gamma$, який утворює даний вектор з віссю $Oz$, якщо $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\beta = \frac{1}{2}$ і відомо, що $\gamma$ – тупий.

**9.** Обчисліть значення інтегралу $\int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)^2}$.

***III рівень*** **(за правильну відповідь – 7 балів). Час виконання – 20 хв.**

**10.** Знайдіть градієнт функції $z = \ln(xy^2 + 1)$ в точці (2;3).

**Критерії оцінювання:**

**„5”** *– 37-40 балів*
**„4”** *– 29-36 балів*
**„3”** *– 21-28 балів*
**„2”** *– 0-20 балів*

**Викладач**
**Зоряна ЧУХРАЙ**

## КОМПЛЕКСНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА
**з дисципліни «Вища математика»**

---

### Варіант 12

***І рівень*** **(за кожну правильну відповідь – 3 бали; у випадку двох правильних відповідей кожна з них оцінюється по 1,5 балу).**

Завдання 1-6 мають по чотири варіанти відповідей, із яких одна або дві правильні. Виберіть правильну відповідь і зазначте її код.

**1.** Виберіть формулу, за допомогою якої знаходиться обернена матриця:

1) $A^{-1} \cdot A = E$;  2) $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta(A)} \cdot \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$;

3) $A^{-1} = E \cdot A$;  4) $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$.

**2.** Обчислення визначника ІІІ-го порядку за елементами третього стовпця можемо виконати з використанням таких дій:

а) за формулою $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ обчислюємо алгебраїчні доповнення до кожного елемента третього стовпця;

б) кожен елемент третього стовпця множимо на значення відповідного алгебраїчного доповнення;

в) записуємо суму добутків кожного елементу третього стовпця на відповідне алгебраїчне доповнення;

г) знаходимо значення суми;

д) записуємо відповідь.

Виберіть такий порядок виконання дій, який займає найменшу площу при записі.

1) а, б, в, г, д;  2) в, а, б, г, д;

3) б, в, а, г, д;  4) б, а, в, г, д.

**3.** Серед запропонованих означень виберіть те, що відповідає поняттю „функція, неперервна в точці $x_0$”:

1) функція $f(x)$ називається неперервною в точці $x = x_0$, якщо в цій точці нескінченно малому приросту аргументу $\Delta x$ відповідає нескінченно малий приріст функції $\Delta y$;

2) функція $f(x)$ називається неперервною в точці $x = x_0$, якщо в цій точці нескінченно малому приросту функції $\Delta y$ відповідає нескінченно малий приріст аргументу $\Delta x$;

3) функція, неперервна в довільній точці, неперервна;

4) функція $f(x)$ називається неперервною в точці $x = x_0$, при $x_0 \in (a;b)$, якщо вона неперервна на всьому проміжку $(a;b)$.

**4.** Якщо процес знаходження похідної другого порядку від параметрично заданої функції $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \ln \sin t \end{cases}$ розбити на етапи, наприклад

а) записати відношення похідної $y_t'$ та $x_t'$;

б) знайти першу похідну від функції $x(t)$;

в) знайти першу похідну від функції $y(t)$;

г) обчислити добуток $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_t' \cdot \dfrac{1}{x'(t)}$;

д) обчислити похідну по $t$ від частки $\dfrac{dy}{dx}$;

е) записати відповідь, то отримати правильний результат допоможе виконання кроків у порядку:

1) б, в, а, д, г, е;  2) в, б, а, д, г, е;

3) а, б, в, г, д, е;  4) а, в, б, д, г, е.

**5**. Відстань від точки до площини обчислюється за формулою:

1) $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$;  2) $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$;

3) $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$  4) $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

**6.** Визначіть, яку з запропонованих формул називають формулою інтегрування частинами:

1) $\int udv = uv - \int vdu$;  2) $\int_a^b vdu = uv\Big|_a^b - \int_a^b udv$;

3) $\int udv = uv - \int vdu + C$; 4) $\int vdu = uv - \int_a^b udv$.

***II рівень*** **(за кожну правильну відповідь – 5 балів). Час виконання – 40 хв.**

**7.** Обчисліть визначник $\Delta x_1$ систему $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_2 + 5x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$ методом трикутників.

**8.** Знайдіть суму компонент вектора $2\overline{a} - 3\overline{b}$, якщо $\overline{a} = (2;3;2;7;1)$, $\overline{b} = (0;-1;4;5;6)$.

**9.** Обчисліть інтеграл частинами: $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$.

***III рівень*** **(за правильну відповідь – 7 балів). Час виконання – 20 хв.**

**10.** Знайдіть значення повного диференціалу функції $z = \cos(x^2 y)$.

**Відповідь:**

**Критерії оцінювання:**

**„5”** – *37-40 балів*
**„4”** – *29-36 балів*
**„3”** – *21-28 балів*
**„2”** – *0-20 балів*

**Викладач**
**Зоряна ЧУХРАЙ**

## КОМПЛЕКСНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА
**з дисципліни «Вища математика»**

---

## Варіант 13

***I рівень*** **(за кожну правильну відповідь – 3 бали; у випадку двох правильних відповідей кожна з них оцінюється по 1,5 балу).**

Завдання 1-6 мають по чотири варіанти відповідей, із яких одна або дві правильні. Виберіть правильну відповідь і зазначте її код.

**1.** Якщо два вектори лежать на одній прямій або паралельних прямих, то вони називаються...:

1) компланарними; 2) колінеарними;
3) рівними; 4) одиничними.

**2.** Функція $y = ax + b$ є ні парною, ні непарною, бо:

1) $f(-x) \neq f(x)$; 2) $f(-x) \neq -f(x)$;

3) $f(-x) = f(x)$; 4) $f(-x) = -f(x)$.

**3.** Точка $x_0$ називається точкою строгого мінімуму, якщо:

1) у вказаному $\delta$ -околі точки $x_0$ виконується нерівність
$$f(x) > f(x_0);$$
2) у вказаному $\delta$ -околі точки $x_0$ виконується нерівність
$$f(x) \geq f(x_0);$$
3) у вказаному $\delta$ -околі точки $x_0$ виконується нерівність
$$f(x) < f(x_0);$$
4) у вказаному $\delta$ -околі точки $x_0$ виконується нерівність
$$f(x) \leq f(x_0).$$

**4.** У якій послідовності необхідно виконати перераховані нижче дії для того, щоб знайти значення границі функції $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \sin 3x}{\ln \sin x}$ за правилом Лопіталя?

а) правило Лопіталя використати таку кількість разів, після якої зникне невизначеність та отримається потрібний результат;

б) у випадку невизначеності $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ чи $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ знайти другу похідну від чисельника та знаменника початкової функції $y = \dfrac{\ln\sin 3x}{\ln\sin x}$ та перевірити виконання правила Лопіталя;

в) знайти похідну чисельника $(\ln\sin 3x)'$ та знаменника $(\ln\sin x)'$, як похідні складених функцій;

г) знайти границю відношення похідних чисельника та знаменника даної функції при умові, що $x \to 0$;

д) перевірити, чи застосовне до даної границі правило Лопіталя, тобто чи одержимо невизначеність типу $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ чи $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ при підстановці значення $x = 0$ у функцію $y = \dfrac{\ln\sin 3x}{\ln\sin x}$;

е) записати відповідь.

1) г, д, в, а, б, е; 2) д, в, г, а, б, е;
3) в, б, д, г, а, е; 4) д, а, в, г, б, е.

**5.** Дана рівність $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ визначає:

1) умову паралельності двох прямих;
2) умову перпендикулярності двох площин;
3) умову перпендикулярності двох прямих;
4) умову паралельності двох площин.

**6.** Які із поданих інтегралів належать до табличних:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$;

3) $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$;

4) $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C$.

***II рівень*** **(за кожну правильну відповідь – 5 балів). Час виконання – 40 хв.**

**7.** Знайдіть прибуток з капіталу та загальну суму позики 10000 грн. на 2 роки із ставкою процента 6%?

**8.** Дано вектори $\overline{a} = -4\overline{i} - 8\overline{j} + 8\overline{k}$ і $\overline{b} = 4\overline{i} + 3\overline{j} + 2\overline{k}$. Знайдіть площу паралелограма, побудованого на цих векторах.

**9.** Знайдіть значення інтегралу використовуючи метод заміни змінних:

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)^2}.$$

***III рівень*** **(за правильну відповідь – 7 балів). Час виконання – 20 хв.**

**10.** Для випуску деякого товару визначена виробнича функція $f(x;y) = xy^3 - 3x^2y^3 + 2y^4 - 120y$ де $x, y$ – фактори виробництва. Дослідити:

1) закон зміни виробничої функції за кожним фактором;
2) еластичність функції за кожним фактором.

**Критерії оцінювання:**

**„5”** – *37-40 балів*
**„4”** – *29-36 балів*
**„3”** – *21-28 балів*
**„2”** – *0-20 балів*

**Викладач**
**Зоряна ЧУХРАЙ**

## КОМПЛЕКСНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА
### з дисципліни «Вища математика»

---

### Варіант 14

***І рівень*** **(за кожну правильну відповідь – 3 бали; у випадку двох правильних відповідей кожна з них оцінюється по 1,5 балу).**

Завдання 1-6 мають по чотири варіанти відповідей, із яких одна або дві правильні. Виберіть правильну відповідь і зазначте її код.

**1.** Вкажіть формулу, за допомогою якої обчислюється скалярний добуток двох векторів:

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos\left(\overline{a} \,\hat{}\, \overline{b}\right)$;

2) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \sin\left(\overline{a} \,\hat{}\, \overline{b}\right)$;

3) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \dfrac{1}{2}\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos\left(\overline{a} \,\hat{}\, \overline{b}\right)$;

4) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \sin 2\left(\overline{a} \,\hat{}\, \overline{b}\right)$.

**2.** У чому полягає відмінність між розв’язанням СЛАР методом Гаусса та методом Жордана-Гаусса?

1) лише у назві;

2) метод Жордана-Гаусса передбачає зведення розширеної матриці до такої, що під головною діагоналлю розміщені нулі, а метод Гаусса – нулі містяться і над головною діагоналлю;

3) метод Гаусса передбачає зведення розширеної матриці до такої, у якій лише під головною діагоналлю розміщені нулі, а метод Жордана-Гаусса – лише головна діагональ не є головною

4) у методі Гаусса, на відміну від методу Жордана-Гаусса, не використовується стовпець вільних членів.

**3.** Критичними точками називаються:

1) точки, в яких похідна функції не існує;

2) точки, в яких похідна функції дорівнює нулю;

3) точки мінімуму чи максимуму;

4) точки, в яких функція набуває найбільшого та найменшого значення.

**4.** Перевіряючи, чи задовольняє функція $z = \dfrac{y}{\left(x^2 - y^2\right)^5}$ рівняння $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$, виконуємо такі дії:

а) перевірити, чи задовольняє функція $z(x;y)$ дане рівняння;

б) обчислити частинну похідну $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ при умові, що $x$ - стала;

в) поділити вираз $\dfrac{y}{\left(x^2 - y^2\right)^5}$ на $y^2$;

г) обчислити частинну похідну від функції $z$ по $x$ вважаючи, що $y = const$;

д) знайти значення добутків $\dfrac{\partial z}{x\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{y\partial y}$;

е) знайти значення суми, що записана у лівій частинні рівняння;

є) зробити висновок.

1) а, г, б, д, в, е, є; 2) г, б, д, в, е, а, є;

3) в, д, б, г, е, а, є; 4) б, г, д, в, е, а, є.

**5.** Кут між прямою і площиною обчислюється за формулою:

1) $\sin\varphi = \dfrac{\left|Am + Bn + Cp\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$;

2) $\cos\varphi = \dfrac{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}{\left|\overline{n_1}\right|\cdot\left|\overline{n_2}\right|}$;

3) $\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$;

4) $\cos\alpha = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

**6.** Які із поданих інтегралів належать до табличних:

1) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$;

3) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = tgx + C$; 4) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$.

***II рівень*** **(за кожну правильну відповідь – 5 балів). Час виконання – 40 хв.**

**7.** Складіть канонічне рівняння еліпса, якщо відстань між фокусами 12, а велика вісь 18.

**8.** Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = \frac{x^2 + x + 1}{x - 3}$ в точці $x_0 = 2$

**9.** Обчисліть значення інтегралу $\int (x^2 - 2x)\cos 5x dx$ використовуючи метод інтегрування по частинах.

***III рівень*** **(за правильну відповідь – 7 балів). Час виконання – 20 хв.**

**13.** Дослідіть можливість використання розв'язків системи

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

, знайдених матричним методом, для формулювання деякої економічної задачі, де $x_1, x_2, x_3$ – кількість виготовленої продукції.

**Критерії оцінювання:**

**„5”** – *37-40 балів*
**„4”** – *29-36 балів*
**„3”** – *21-28 балів*
**„2”** – *0-20 балів*

**Викладач**
**Зоряна ЧУХРАЙ**

## КОМПЛЕКСНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА
### з дисципліни «Вища математика»

---

### Варіант 15

***I рівень*** **(за кожну правильну відповідь – 3 бали; у випадку двох правильних відповідей кожна з них оцінюється по 1,5 балу).**
Завдання 1-6 мають по чотири варіанти відповідей, із яких одна або дві правильні. Виберіть правильну відповідь і зазначте її код.

**1.** Нехай задано вираз $2B-3A$, де $A, B-$матриці $n-$го порядку, та вказані кроки, які необхідно виконати для отримання результату. Виберіть ту відповідь, що містить вірний порядок виконання кроків:

а) скласти різницю отриманих матриць згідно умови задачі та виконати операцію віднімання;

б) помножити матрицю $B$ на стале число 2: кожне число матриці помножити на даний множник;

в) помножити матрицю $A$ на стале число 3;

г) відповідь записати у вигляді матриці.

1) б, в, г, а; 2) б, г, в, а;
3) б, в, а, г; 4) б, а, в, г;
5) власна відповідь.

**2.** Виберіть формулу, що є умовою колінеарності векторів:

1) $\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=\frac{z_2}{z_1}$; 2) $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$;

3) $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$; 4) $\frac{y_1}{z_1}=\frac{y_2}{z_2}=\frac{x_1}{x_2}$;

5) власна відповідь.

**3.** Точкою перегину кривої називається:

1) точка, яка відокремлює проміжки зростання від проміжків спадання функції;

2) точка, яка відокремлює вгнуту частину кривої від опуклої;

3) точка, яка відокремлює опуклу частину неперервної кривої від вгнутої;

4) точка, яка відокремлює проміжки спадання від проміжків зростання функції;

5) власна відповідь.

**4.** Для того, щоб дослідити функцію $f(x)=\dfrac{x^3+2x+1}{x^2-5x+4}$ на неперервність в точці $x_0=2$ треба перевірити виконання таких умов:

а) знайти значення функції в точці $x_0=2$, тобто $f(2)$;

б) перевірити виконання умови $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x+1}{x^2-5x+4}=f(2)$;

в) перевірити, чи визначена функція $f(x)=\dfrac{x^3+2x+1}{x^2-5x+4}$ в точці $x_0=2$, тобто чи належить ця точка області визначення даної функції;

г) знайти ОДЗ даної функції;

д) обчислити границю функції $f(x)=\dfrac{x^3+2x+1}{x^2-5x+4}$ при $x\to 2$;

е) записати відповідь.

У якій послідовності потрібно виконати перераховані умови, щоб досягти бажаного результату?

1) г, в, а, д, б, е; 2) г, в, д, а, б, е;
3) в, г, а, б, д, е; 4) б, в, г, д, а, е;
5) власна відповідь.

**5.** Відстань між двома точками на площині обчислюється за допомогою формули:

1) $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$;

2) $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$;

3) $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$;

4) $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

**6.** З означення первісної та невизначеного інтеграла випливає, що $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$. Сформулюйте правильно даний наслідок:

1) похідна від інтегралу дорівнює первісній;
2) похідна від первісної дорівнює невизначеному інтегралу;
3) похідна від первісної дорівнює підінтегральній функції;
4) похідна від підінтегральної функції дорівнює первісній.

***II рівень*** **(за кожну правильну відповідь – 5 балів). Час виконання – 40 хв.**

**9.** Визначіть виручену суму для такого дисконтного векселя: завершальна вартість 90000 грн., ставка дисконту 8%, час 9 місяців.
**10.** Виберіть число, що є сумою координат точки С, яка належить відрізку $AB$, причому $CB = 2AC$ та $A(3;-2;0)$, $B(6;4;3)$.

**12.** Обчисліть інтеграл заміною: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$.

***III рівень*** **(за правильну відповідь – 7 балів). Час виконання – 20 хв.**

**13.** Дано функцію $z = e^{\frac{x}{y}}$. Показати, що $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

**Критерії оцінювання:**

**„5”** – *37-40 балів*
**„4”** – *29-36 балів*
**„3”** – *21-28 балів*
**„2”** – *0-20 балів*

**Викладач**
**Зоряна ЧУХРАЙ**

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебра и начала анализа: учебник [для сред. спец. учеб. заведений] / Под ред. Г.Н. Яковлева. – М. : Наука, 1977. – (Математика для техникумов). – Ч.1. – 336 с.
2. Алгебра и начала анализа: учебник [для сред. спец. учеб. заведений] / Под ред. Г.Н. Яковлева. – М. : Наука, 1977. – (Математика для техникумов). – Ч.2. – 335 с.
3. Алгебра и начала анализа: учебник / М.И. Каченовский, Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин, Г.Н. Яковлєв; под ред. Г.Н. Яковлева. – М. : Наука, 1978. – (Математика для техникумов). – Ч.1. – 336 с.
4. Алгебра и начала анализа: [учебник для сред. спец. учеб. заведений] / М.И. Каченовский, Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин, Г.Н. Яковлев; под ред. Г.Н. Яковлева. – М. : Наука, 1978. – (Математика для техникумов). – Ч.2. – 335 с.
5. Алгебра і початки аналізу: [підручник для серед. спец. навчальних закладів] / М.І. Каченовський, Ю.М. Калугін, Г.Л. Луканкін, Г.М. Яковлєв; за ред. Г.М. Яковлєва. – К. : Вища школа, 1979. – (Математика для технікумів). – Ч.1. – 310 с.
6. Алгебра і початки аналізу: [підручник для серед. спец. навчальних закладів] / М.І. Каченовський, Ю.М. Калугін, Г.Л. Луканкін, Г.М. Яковлєв; за ред. Г.М. Яковлєва. – К. : Вища школа, 1980. – (Математика для технікумів). – Ч.2. – 312 с.
7. Алгебра і початки аналізу: в 2-х ч./ Під ред. Г.Н. Яковлєва. – [2-е вид.] – К.: Вища шк., 1984. – Ч.1. – 293с.
8. Алгебра і початки аналізу: в 2-х ч./ Під ред. Г.Н. Яковлєва. – [2-е вид.] – К.: Вища шк., 1984. – Ч.2. – 293 с.
9. Андронов И.К. Математика для техникумов / И. К. Андронов. – М. : Высш. шк., 1965. – 824 с.
10. Афанасьєва О.М. Дидактичні матеріали з математики / О.М. Афанасьєва, Я.С. Бродський, О.Л. Павлов, А.К. Сліпенко. – К. : Вища школа, 2001. – 270 с.
11. Барковський В.В. Математика для економістів. Основи елементарної математики: [абітур. та студ. екон. спец.] / В.В. Барковський, Н.В. Барковська. – К. : НАУ, 1999. – 240 с.
12. Барковський В.В. Вища математика для економістів / В.В. Барковський, Н.В. Барковська. – К. : ЦУЛ, 2002. – 400 с.

13. Бевз В.Г. Практикум з історії математики: навч. посіб. [для студ. фіз.-мат. Факультетів пед.. університетів] / В.Г. Бевз. – К. : НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2004. – 312 с.
14. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: [учеб. пособие для техникумов] / Н.В. Богомолов – [3-е изд.] – М. : Высш. шк., 1990. – 495 с.
15. Бугір М.К. Математика для економістів: посібник / М.К. Бугір – К. : Академія, 2003. – 520 с.
16. Бугір М.К. Математика для економістів / М.К. Бугір. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2001. – 192 с.
17. Валуцэ И.И. Математика для техникумов на базе средней школы: [учеб. Пособие] / И.И. Валуцэ, Г.Д. Дицигул – [2-е изд] – М. : Наука., 1989. – 576 с.
18. Васильченко І.П. Вища математика для економістів: підручник / І.П. Васильченко – [3-тє вид.] – К. : Знання, 2007. – 454 с.
19. Вища математика: навч. – метод. посібник [для самост. вивч. дисцип.] / К.Г. Валєєв, І.А. Джалладова, О.І. Лютий та ін. – [2-ге вид.] – К.: КНЕУ, 2002. – 606 с.
20. Вища математика. Навчальна програма для вищих навчальних закладів I-II рівнів акредитації (для спеціальностей напрямів підготовки: 0501 Економіка і підприємництво; 0502 Менеджмент). / Укл. Л.В. Хомченко. – К.: Центр „Методика - інформ", 2003. – 22 с.
21. Вища математика: Зб. задач: у 2 ч.: навч. посіб. [для студ. вищ. техн. навч. закл.] / Х.І. Гаврильченко, С.П. Полушкін, П.С. Кропив'янський та ін.; за заг. ред. д-ра техн. наук, проф. П.П. Овчинникова. – К. : Техніка, 2003. – Ч.1. – 279 с.
22. Вища математика: Зб. задач: у 2 ч. : навч. посіб. [для студ. вищ. техн. навч. закл.] / П.П. Овчинников, С.П. Полушкін, П.С. Кропив'янський та ін.; за заг. ред. д-ра техн. наук, проф. П.П. Овчинникова. – К. : Техніка, 2003. – Ч.2. – 376 с.
23. Выгодский М.Я. Высшая математика для техникумов / М.Я. Выгодский. – [3-е изд.] – М. : Высш. школа, 1969. – 446 с.
24. Геометрия: Учебник для техникумов. В. 2-х ч. / М.И. Каченовский, Ю.М. Колягин, А.Д. Кутасов, Г.Л. Луканкин, В.А. Оганесян, Г.Н. Яковлев. – Киев : Вища школа, 1980. – Ч.2. – 152 с.
25. Геометрия / М.И. Каченовский, Ю.М. Колягин, А.Д. Кутасов и др.; Под ред. Г.Н. Яковлева– [2-е изд.] – Киев : Вища школа, 1983. – 256 с.

26. Грисенко М.В. Математика для економістів: Методи й моделі, приклади й задачі: Навч. Посібник. – К.: Либідь, 2007. – 720 с.
27. Гуревич В.Б. Математика для техникумов / В.Б. Гуревич, В.С. Кудинов и др. Под общ. ред. проф. П.А. Безсонова. – М. – Л., 1934. – 691 с.
28. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посібн. // В.П. Дубовик, І.І. Юрик – К. : А.С.К., 2005. – 648 с.
29. Дюженкова Л.І. Вища математика: приклади і задачі / Л.І. Дюженкова, О.Ю. Дюженков, Г.О. Михалін – К. : Академія, 2003. – 624 с.
30. Економіка підприємства: підручник / За ред. С.Ф. Покропивного. – [2-ге вид.]. – К. : КНЕУ, 2001. – 528 с.
31. Жильцов О.Б. Вища математика з елементами інформаційних технологій: навч. посіб. / О.Б. Жильцов, Г.М. Торбін. – К. : МАУП, 2002. – 408 с.
32. Жлуктенко В.І. Теорія ймовірностей і математична статистика : у 2-х ч. : [навч.- метод. посібник] / Жлуктенко В.І., Наконечний С.І., Савіна С.С. – К. : КНЕУ, 2001. – Ч. ІІ. Математична статистика. – 336 с.
33. Журавлев С.Г. Дифференциальные уравнения: Сборник задач: примеры и задачи экономики, экологии и других социальных наук: Учебное пособие для вузов/ С.Г. Журавлев, В.В. Аниковский. – М. : Издательство "Экзамен", 2005. – 128 с.
34. Красс М.С. Математика для экономических специальностей: учебник [для студ. вузов, обучающихся по экон. спец.] / М.С. Красс. – [4-е изд.] – М. : Дело, 2003. – 703 с.
35. Крот М.М. Вища математика: навчальний посібник [для вищих навч. закладів І-ІІ рівнів акредитації] / М.М. Крот, А.В. Старикова. – Чернівці : Технодрук, 2006. – 236 с.
36. Кундышева Е.С. Математика: учебное пособие для экономистов / Е.С. Кундышева. – М. : Дашков и К, 2005. – 536 с.
37. Курс математики для техникумов: учеб. пособие [для сред. спец. учеб. заведений]. В 2-х ч./ Под ред. Н.М. Матвеева. – М. : Наука, 1976. – Ч.1. – 399 с.
38. Курс математики для техникумов: учеб. пособие [для сред. спец. учеб. заведений]. В 2-х ч. / Под ред. Н.М. Матвеева. – М. : Наука, 1976. – Ч.2. – 367 с.
39. Лейфура В.М. Математика: підручник [для студентів економ. спеціальностей вищ. навч. закладів І-ІІ рівнів акредитації] /

В.М. Лейфура, Г.І. Городницький, Й.І. Файст; За ред. В.М. Лейфури. – К.: Техніка, 2003. – 640 с.
40. Литвин І.І. Вища математика : навчальний посібник / І.І. Литвин, О.М. Конончук, Г.О. Желєзняк. – Львів, 2002. – 272 с.
41. Лютий О.І. Збірник задач з вищої математики / О.І. Лютий, О.І. Макаренко – К. : КНЕУ, 2003. -305 с.
42. Малыхина В.И. Математика в экономике: учебное пособие / В.И. Малыхина. – М. : ИНФРА-М, 2002. – 352 с.
43. Марченко І. Математика в технікумі: підручник математики [для технікумів] / І. Марченко. – Харків – Київ : Держтехвидав України, 1931. – 532 с.
44. Марченко І. Задачник з математики для технікумів / І. Марченко. – Харків – Дніпропетровськ: ОНТВУ, 1933. – 320 с.
45. Математика для техникумов. Геометрия / Под ред. Г.Н. Яковлева. – [2-е изд.]. – М. : Наука, 1982. – 319 с.
46. Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа: учебник / М.И. Каченовский, Ю.М. Колягин, А.Д. Кутасов, Г.Л. Луканкин и др.; Под ред. Г.Н. Яковлева. – [3-е изд.]. – М. : Наука, 1987. – Ч. 1. – 464 с.
47. Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа: учебник / М.И. Каченовский, Ю.М. Колягин, А.Д. Кутасов, Г.Л. Луканкин и др.; Под ред. Г.Н. Яковлева. – [3-е изд.]. – М. : Наука, 1988. – Ч. 2. – 272 с.
48. Математика в экономике: учеб.- метод. пособие [для студ. эконом. спец.] / Под ред. Н.Ш. Кремера. – М. : Финстатинформ, 1999. – 96 с.
49. Математика. Математический анализ для экономистов: учебник для вузов / О.И. Ведина и др.; Ред. А.А. Гриб и др. – М. : Филинь, Римант, 2000. – 360 с.
50. Математика: підручник / О.М. Афанасьєва, Я.С. Бродський, О.Л. Павлов, А.К. Сліпенко. – [2-ге вид.]. – К. : Вища шк., 2002. – 447 с.
51. Математика для економістів: теорія та застосування: підручник / В.П. Лавренчук, Т.І. Готинчан, В.С. Дронь, О.С. Кондур. – К. : Кондор, 2007. – 596 с.
52. Овчинников П.П. Вища математика: підручник. У 2 ч. : / За заг. ред. П.П. Овчинникова; Пер. з рос. П. Юрченка. – [2-ге вид.]. – К. : Техніка, 2000. – Ч.1. – 592 с.

53. Овчинников П.П. та ін. Вища математика: підручник. У 2 ч. : / За заг. ред. П.П. Овчинникова; Пер. з рос. П. Юрченка. – [2-ге вид.]. – К. : Техніка, 2000. – Ч. 2. – 792 с.
54. Пасічник Я.А. Математика: лекції для студентів – економістів / Я.А. Пасічник. – [2-ге вид.]. – Острог : Острозька Академія, 2000. – 284 с.
55. Преподавание геометрии в средних ПТУ (1-й год обучения) / Е.С. Дубинчук, З. И. Слэпкань. – К. : Вища шк., 1985. – 112 с.
56. Преподавание геометрии в средних ПТУ (2-й год обучения) / Е.С. Дубинчук, З.И. Слэпкань. – К. : Вища шк., 1986. – 137 с.
57. Сборник задач по математике для техникумов / О.Н. Афанасьева, Я.С. Бродський, И.И. Гунтик, А.Л. Павлов. – [2-е изд.]. – М. : Наука, 1992. – 207 с.
58. Тарасов Н.П. Курс высшей математики для техникумов / Н.П. Тарасов. – [17-е изд.]. – М. : Наука, 1975. – 432 с.
59. Швець В.О. Математика: навчальний посібник / В.О. Швець, Г.І. Білянін. – Чернівці : Зелена Буковина, 2003. – 382 с.
60. Шестаков С.С. Лінійна алгебра і аналітична геометрія: навч. – метод. посіб. / С.С. Шестаков. – К. : МАУП, 2004. – 56 с.

Навчальне видання

**ЧУХРАЙ Зоряна Борисівна,**
канд. пед. наук, доцент кафедри вищої математики
Національного університету водного господарства
та природокористування

**ЧАШЕЧНИКОВА Ольга Серафимівна,**
доктор пед. наук, професор,
завідувачка кафедри математики, фізики та методики
її викладання Сумського державного педагогічного університету
ім. А.С. Макаренка

# ВИЩА МАТЕМАТИКА: теорія, практика, застосування в професійній діяльності економіста

*Навчально-методичний посібник*
*для самостійної та дистанційної роботи студентів*

*Видання 2-ге, доповнене*

*Технічний редактор*
Віталій Власюк

Підписано до друку 15.12.2025 р. Формат 60x84 1/16.
Папір офсет. Ґарнітура «Times». Друк офсет.
Ум. друк. арк. 29,53. Наклад 100 пр. Зам. 96.
Видавництво «Волинські обереги».
33028 м. Рівне, вул. 16 Липня, 38; тел./факс: (0362) 62-03-97;
e-mail: oberegi97@ukr.net
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб’єкта
видавничої справи ДК № 270 від 07.12.2000 р.

Надруковано в друкарні видавництва «Волинські обереги».