

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

В.С.ГРИЦЕВИЧ

**МЕТОДИ МАТЕМАТИКО-ГЕОГРАФІЧНОГО
ПРОГНОЗУВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ.
Тексти лекцій**

Львів 2016

Рецензенти:

докт. геогр. наук, проф. М.Дністрянський
(Львівський національний університет імені Івана Франка)
канд. геогр. наук, доц. Я.Хомин
(Львівський національний університет імені Івана Франка)

Грицевич В.С.

Методи математико-географічного прогнозування та оптимізації: тексти лекцій. –Львів: Малий видавничий центр. Лабораторія тематичного картографування географічного факультету, 2016. -32 с.

У тексті лекцій подані теоретичні основи математичних методів, які потрібні студентам і аспірантам для прогнозування та оптимізації при виконанні суспільно-географічних досліджень, зокрема при написанні курсових, дипломних, магістерських і дисертаційних робіт.

Для студентів денної та заочної форми навчання спеціальності “географія”.

© Грицевич В., 2016

КІЛЬКІСНІ МЕТОДИ ЧАСОВОГО ПРОГНОЗУВАННЯ

План

1. Точна лінійна часова екстраполяція
2. Точна квадратична часова екстраполяція
3. Точна гармонійна часова екстраполяція
4. Регресійна часова лінійна екстраполяція
5. Регресійна часова квадратична екстраполяція

1. Точна лінійна часова екстраполяція

Нехай відомі значення кількісної ознаки за два моменти часу. Запишемо цю інформацію у вигляді такої таблиці:

Момент часу	t_0	t_1
Значення ознаки	w_0	w_1

Ставиться задача здійснити прогноз w для моменту часу $t > t_1$. Для розв'язання цієї задачі існує точна лінійна формула:

$$w_{\text{прогн}}(t) = w_1 + D_{10} \cdot (t - t_1),$$

де $D_{10} = \frac{w_1 - w_0}{t_1 - t_0}$ - швидкість зміни показника.

Наведена формула називається точною, бо в моменти часу t_0, t_1 ця формула дає точні значення w_0, w_1 .

2. Точна квадратична часова екстраполяція

Нехай відомі значення кількісної ознаки за три моменти часу. Запишемо цю інформацію у вигляді такої таблиці:

Момент часу	t_0	t_1	t_2
Значення ознаки	w_0	w_1	w_2

Ставиться задача здійснити прогноз w для моменту часу $t > t_2$.
 Для розв'язання цієї задачі існує точна квадратична формула:

$$w_{\text{прогн}}(t) = w_2 + D_{21} \cdot (t - t_2) + D_{210} \cdot (t - t_2) \cdot (t - t_1),$$

де $D_{210} = \frac{D_{21} - D_{10}}{t_2 - t_0}$, $D_{21} = \frac{w_2 - w_1}{t_2 - t_1}$, $D_{10} = \frac{w_1 - w_0}{t_1 - t_0}$.

Наведена формула називається точною, бо в моменти часу t_0, t_1, t_2 ця формула дає точні значення w_0, w_1, w_2 . Однак, слід пам'ятати, що хоча квадратична прогнозна формула є по-суті точнішою від лінійної, але вона дуже чутлива до похибок у даних, тобто малі похибки в даних можуть привести до значних похибок у прогнозі. Тому її недоцільно використовувати в тих випадках, коли відомо, що початкові дані містять навмисні чи ненавмисні похибки.

Крім точної лінійної та квадратичної екстраполяції можна аналогічно, маючи значення ознаки за більшу кількість моментів часу, побудувати формули для екстраполяцій вищих порядків. Ми не будемо цього робити з трьох причин: по-перше, такі формули достатньо громіздкі, по-друге, вони також чутливі до похибок, по-третє, при більшій кількості даних чудово працюють методи регресійної екстраполяції, про які мова піде далі.

3. Точна гармонійна часова екстраполяція

Нехай відомі значення за три моменти часу кількісної ознаки, яка має періодичний характер мінливості з періодом T . Запишемо цю інформацію у вигляді такої таблиці:

Момент часу	t_1	t_2	t_3
Значення ознаки	w_1	w_2	w_3

Ставиться задача здійснити прогноз w для довільного моменту часу.

Для розв'язання цієї задачі існує точна гармонійна формула:

$$w_{\text{прогн}}(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T}\right) + b_1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T}\right),$$

$$\text{де } a_0 = \frac{2}{3} \cdot (w_1 + w_2 + w_3),$$

$$a_1 = \frac{2}{3} \cdot \left(w_1 \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot t_1}{T}\right) + w_2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot t_2}{T}\right) + w_3 \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot t_3}{T}\right) \right),$$

$$b_1 = \frac{2}{3} \cdot \left(w_1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t_1}{T}\right) + w_2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t_2}{T}\right) + w_3 \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t_3}{T}\right) \right).$$

4. Регресійна часова лінійна екстраполяція

Нехай відомі значення кількісної ознаки за багато моментів часу t_1, t_2, \dots, t_n . Запишемо цю інформацію у вигляді такої таблиці:

Момент часу	t_1	t_2	...	t_n
Значення ознаки	w_1	w_2	...	w_n

Ставиться задача здійснити прогноз значень w для моменту часу $t > t_n$.

Для розв'язання цієї задачі існує лінійна регресійна формула:

$$w_{\text{прогн}}(t) = \bar{w} + a \cdot (t - \bar{t}),$$

$$\text{де } \bar{t} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n t_j, \quad \bar{w} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n w_j,$$

$$a = \frac{S_{tw}}{S_{tt}}, \quad S_{tt} = \sum_{j=1}^n (t_j - \bar{t})^2, \quad S_{tw} = \sum_{j=1}^n (t_j - \bar{t}) \cdot (w_j - \bar{w}).$$

Потрібно відзначити, що при обчисленні коефіцієнтів регресійної формули виконуються декілька операцій усереднення та

сумування. Це дає змогу певною мірою взаємно погасити вплив можливих похибок у початкових даних. Саме тому регресійна формула має ту перевагу, що вона малочутлива до випадкових похибок у даних.

5. Регресійна часова квадратична екстраполяція

Нехай відомі значення кількісної ознаки за багато моментів часу t_1, t_2, \dots, t_n . Запишемо цю інформацію у вигляді такої таблиці:

Момент часу	t_1	t_2	...	t_n
Значення ознаки	w_1	w_2	...	w_n

Ставиться задача здійснити прогноз значень ознаки w для моменту часу $t > t_n$.

Для розв'язання цієї задачі існує квадратична регресійна формула:

$$w_{\text{прогн}}(t) = \bar{w} + a \cdot (t - \bar{t})^2 + b \cdot (t - \bar{t}) + c,$$

де $\bar{t} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n t_j$, $\bar{w} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n w_j$, $\Delta = \left(S_{ttt} - \frac{S_{tt}^2}{n} \right) \cdot S_{tt} - S_{tt}^2$,

$$a = \frac{S_{tt} \cdot S_{ttw} - S_{ttt} \cdot S_{tw}}{\Delta}, \quad b = \frac{\left(S_{ttt} - \frac{S_{tt}^2}{n} \right) \cdot S_{tw} - S_{ttt} \cdot S_{ttw}}{\Delta}, \quad c = -\frac{S_{tt}}{n} \cdot a,$$

$$S_{tt} = \sum_{j=1}^n (t_j - \bar{t})^2, \quad S_{ttt} = \sum_{j=1}^n (t_j - \bar{t})^3, \quad S_{tttt} = \sum_{j=1}^n (t_j - \bar{t})^4,$$

$$S_{tw} = \sum_{j=1}^n (t_j - \bar{t}) \cdot (w_j - \bar{w}), \quad S_{ttw} = \sum_{j=1}^n (t_j - \bar{t})^2 \cdot (w_j - \bar{w}).$$

Якщо моменти часу t_1, t_2, \dots, t_n слідуєть один за одним через однакові проміжки (а така ситуація дуже часто трапляється в

суспільно-географічних дослідженнях), то для визначення коефіцієнтів регресійного рівняння можна скористатися формулами:

$$a = \frac{S_{tw}}{S_{tt} - \frac{S_{tt}^2}{n}}, \quad b = \frac{S_{tw}}{S_{tt}}, \quad c = -\frac{S_{tt}}{n} \cdot a.$$

Для неоднакових проміжків між моментами часу t_1, t_2, \dots, t_n , ці формули недійсні.

У цілому квадратична регресійна формула дає точніший прогноз ніж лінійна регресійна і вона також малочутлива до похибок даних.

Тестові завдання

1. Скільки спостережень потрібно мати для точного лінійного прогнозу ?

1. жодного 2. два 3. один 4. три 5. довільну кількість

2. Скільки спостережень потрібно мати для точного квадратичного прогнозу ?

1. два 2. довільну кількість 3. чотири 4. три 5. жодного

3. Яка екстраполяція моделює прямолінійне зростання показника для багатьох спостережень ?

1. точна лінійна 2. точна квадратична 3. гармонійна
4. регресійна лінійна 5. регресійна квадратична

4. Яка екстраполяція моделює параболічне зростання показника для багатьох спостережень ?

1. точна квадратична 2. регресійна квадратична 3. гармонійна
4. точна лінійна 5. регресійна лінійна

5. Яка екстраполяція є чутливою до похибок у даних ?

1. точна лінійна 2. точна квадратична 3. гармонійна
4. регресійна лінійна 5. регресійна квадратична

МЕТОДИ МАТЕМАТИКО-КАРТОГРАФІЧНОГО ПРОГНОЗУВАННЯ

План

1. Загальні положення математико-картографічного прогнозування
2. Методи часової екстраполяції
3. Методи просторової екстраполяції
4. Методи параметричної екстраполяції

1. Загальні положення математико-картографічного прогнозування

Математико-картографічне прогнозування – це один із напрямків здійснення прогнозів. При застосуванні методів кількісного прогнозування завжди потрібно пам'ятати кілька аспектів, без яких таке прогнозування може бути не точним:

- по-перше, крім методів кількісного прогнозування існують ще методи якісного прогнозування і ці групи методів доцільно застосовувати в комплексі;
- по-друге, в прогностиці існує низка принципів прогнозування, серед яких зараз виділимо принцип врахування природної специфічності, який зокрема вимагає дотримання значень прогнозованих ознак в їхніх природних межах.

Математико-картографічне прогнозування дає змогу передбачити поведінку досліджуваного об'єкта при нових для нього умовах.

Новизна умов може полягати у перенесенні закону поведінки об'єкта в інший інтервал часу, в інший ареал геопростору, або в інші значення чинників (параметрів) від яких він залежить.

Саме тому є три види математико-картографічних прогнозів:

- часовий прогноз,
- просторовий прогноз,
- параметричний прогноз.

2. Методи часової екстраполяції

Точна лінійна часова екстраполяція

Нехай відомі значення географічного поля кількісної ознаки за два моменти часу. Запишемо цю інформацію у вигляді такої таблиці:

Момент часу	t_0	t_1
Значення поля ознаки	$w_0(x, y)$	$w_1(x, y)$

Ставиться задача здійснити прогноз географічного поля $w(x, y)$ для моменту часу $t > t_1$.

Для розв'язання цієї задачі існує точна лінійна формула:

$$w_{\text{прогн}}(x, y, t) = w_1(x, y) + D_{10}(x, y) \cdot (t - t_1),$$

де $D_{10}(x, y) = \frac{w_1(x, y) - w_0(x, y)}{t_1 - t_0}$ - поле швидкості зміни показника.

Наведена формула називається точною, бо в моменти часу t_0, t_1 ця формула дає точні значення $w_0(x, y), w_1(x, y)$.

Точна квадратична часова екстраполяція

Нехай відомі значення географічного поля кількісної ознаки за три моменти часу. Запишемо цю інформацію у вигляді такої таблиці:

Момент часу	t_0	t_1	t_2
Значення поля ознаки	$w_0(x, y)$	$w_1(x, y)$	$w_2(x, y)$

Ставиться задача здійснити прогноз географічного поля $w(x, y)$ для моменту часу $t > t_2$.

Для розв'язання цієї задачі існує точна квадратична формула:

$$w_{\text{прогн}}(x, y, t) = w_2(x, y) + D_{21}(x, y) \cdot (t - t_2) + D_{210}(x, y) \cdot (t - t_2) \cdot (t - t_1)$$

$$\text{де } D_{210}(x, y) = \frac{D_{21}(x, y) - D_{10}(x, y)}{t_2 - t_0},$$

$$D_{21}(x, y) = \frac{w_2(x, y) - w_1(x, y)}{t_2 - t_1}, \quad D_{10}(x, y) = \frac{w_1(x, y) - w_0(x, y)}{t_1 - t_0}.$$

Наведена формула називається точною, бо в моменти часу t_0, t_1, t_2 ця формула дає точні значення $w_0(x, y), w_1(x, y), w_2(x, y)$. Однак, слід пам'ятати, що хоча квадратична прогнозна формула є по суті точнішою від лінійної, але вона дуже чутлива до похибок у даних, тобто малі похибки в даних можуть привести до значних похибок у прогнозі. Тому її недоцільно використовувати в тих випадках, коли відомо, що початкові дані містять навмисні чи ненавмисні похибки.

Крім точної лінійної та квадратичної екстраполяції можна аналогічно, маючи значення ознаки за більшу кількість моментів часу, побудувати формули для екстраполяцій вищих порядків. Ми не будемо цього робити з трьох причин: по-перше, такі формули достатньо громіздкі, по-друге, вони також чутливі до похибок, по-третє, при більшій кількості даних чудово працюють методи регресійної екстраполяції, про які мова піде далі.

Регресійна часова лінійна екстраполяція

Нехай відомі значення географічного поля кількісної ознаки за багато моментів часу t_1, t_2, \dots, t_n . Запишемо цю інформацію у вигляді такої таблиці:

Момент часу	t_1	t_2	...	t_n
Значення поля ознаки	$w_1(x, y)$	$w_2(x, y)$...	$w_n(x, y)$

Ставиться задача здійснити прогноз значень географічного поля $w(x, y)$ для моменту часу $t > t_n$.

Для розв'язання цієї задачі існує регресійна формула:

$$w_{\text{прогн}}(x, y, t) = \bar{w}(x, y) + a(x, y) \cdot (t - \bar{t}),$$

де
$$\bar{t} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n t_j, \quad \bar{w}(x, y) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n w_j(x, y),$$

$$a(x, y) = \frac{S_{tw}(x, y)}{S_{tt}}, \quad S_{tt} = \sum_{j=1}^n (t_j - \bar{t})^2,$$

$$S_{tw}(x, y) = \sum_{j=1}^n (t_j - \bar{t}) \cdot [w_j(x, y) - \bar{w}(x, y)].$$

Потрібно відзначити, що при обчисленні коефіцієнтів регресійної формули виконуються декілька операцій усереднення та сумування. Це дає змогу певною мірою взаємно погасити вплив можливих похибок у початкових даних. Тому регресійна формула має таку перевагу, що вона малочутлива до випадкових похибок у даних.

Регресійна часова квадратична екстраполяція

Нехай відомі значення географічного поля кількісної ознаки за багато моментів часу t_1, t_2, \dots, t_n . Запишемо цю інформацію у вигляді такої таблиці:

Момент часу	t_1	t_2	...	t_n
Значення поля ознаки	$w_1(x, y)$	$w_2(x, y)$...	$w_n(x, y)$

Ставиться задача здійснити прогноз значень географічного поля $w(x, y)$ для моменту часу $t > t_n$.

Для розв'язання цієї задачі існує регресійна формула:

$$w_{\text{прогн}}(x, y, t) = \bar{w}(x, y) + a(x, y) \cdot (t - \bar{t})^2 + b(x, y) \cdot (t - \bar{t}) + c(x, y),$$

$$\text{де } \bar{t} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n t_j, \quad \bar{w}(x, y) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n w_j(x, y), \quad \Delta = \left(S_{ttt} - \frac{S_{tt}^2}{n} \right) \cdot S_{tt} - S_{ttt}^2,$$

$$a(x, y) = \frac{S_{tt} \cdot S_{ttw}(x, y) - S_{ttt} \cdot S_{tw}(x, y)}{\Delta},$$

$$b(x, y) = \frac{\left(S_{ttt} - \frac{S_{tt}^2}{n} \right) \cdot S_{tw}(x, y) - S_{ttt} \cdot S_{ttw}(x, y)}{\Delta},$$

$$c(x, y) = -\frac{S_{tt}}{n} \cdot a(x, y),$$

$$S_{tt} = \sum_{j=1}^n (t_j - \bar{t})^2, \quad S_{ttt} = \sum_{j=1}^n (t_j - \bar{t})^3, \quad S_{tttt} = \sum_{j=1}^n (t_j - \bar{t})^4,$$

$$S_{tw}(x, y) = \sum_{j=1}^n (t_j - \bar{t}) \cdot [w_j(x, y) - \bar{w}(x, y)],$$

$$S_{ttw}(x, y) = \sum_{j=1}^n (t_j - \bar{t})^2 \cdot [w_j(x, y) - \bar{w}(x, y)].$$

Якщо моменти часу t_1, t_2, \dots, t_n слідуєть один за одним через однакові проміжки (а така ситуація часто трапляється в суспільно-географічних дослідженнях), то $S_{ttt} = 0$ і для визначення коефіцієнтів регресійного рівняння можна скористатися простішими формулами:

$$a(x, y) = \frac{S_{tw}(x, y)}{S_{tt} - \frac{S_{tt}^2}{n}}, \quad b(x, y) = \frac{S_{tw}(x, y)}{S_{tt}}, \quad c(x, y) = -\frac{S_{tt}}{n} \cdot a(x, y).$$

У цілому квадратична регресійна формула дає точніший прогноз ніж лінійна регресійна і вона також малочутлива до похибок даних.

3. Методи просторової екстраполяції

Точна лінійна просторова екстраполяція

Нехай відомі значення географічного поля кількісної ознаки в трьох просторових точках. Запишемо цю інформацію у вигляді такої таблиці:

Номер точки	Координата x	Координата y	Інтенсивність поля w
1	x_1	y_1	w_1
2	x_2	y_2	w_2
3	x_3	y_3	w_3

Ставиться задача здійснити просторовий прогноз значення географічного поля w для довільної точки (x, y) .

Для розв'язання цієї задачі існує точна лінійна формула:

$$w_{\text{прогн}}(x, y) = w_1 \cdot L_1(x, y) + w_2 \cdot L_2(x, y) + w_3 \cdot L_3(x, y),$$

$$\text{де } L_1(x, y) = \frac{-(y_3 - y_2) \cdot x + (x_3 - x_2) \cdot y + (x_2 y_3 - x_3 y_2)}{\Delta},$$

$$L_2(x, y) = \frac{-(y_1 - y_3) \cdot x + (x_1 - x_3) \cdot y + (x_3 y_1 - x_1 y_3)}{\Delta},$$

$$L_3(x, y) = \frac{-(y_2 - y_1) \cdot x + (x_2 - x_1) \cdot y + (x_1 y_2 - x_2 y_1)}{\Delta},$$

$$\Delta = (x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3).$$

Приведена формула називається точною, бо в точках $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ вона дає точні значення w_1, w_2, w_3 відповідно.

Регресійна лінійна просторова екстраполяція

Нехай відомі значення географічного поля кількісної ознаки в m просторових точках. Запишемо цю інформацію у вигляді такої таблиці:

Номер точки	Координата x	Координата y	Інтенсивність поля w
1	x_1	y_1	w_1
2	x_2	y_2	w_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
m	x_m	y_m	w_m

Ставиться задача здійснити просторовий прогноз значення географічного поля w для довільної точки (x, y) .

Для розв'язання цієї задачі існує регресійна лінійна формула:

$$w_{\text{прогн}}(x, y) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y$$

Побудова цієї формули полягає у визначенні коефіцієнтів a_0, a_1, a_2 .

$$\Delta = S_{xx} \cdot S_{yy} - S_{xy}^2,$$

$$a_1 = \frac{S_{xw}S_{yy} - S_{xy}S_{yw}}{\Delta}, \quad a_2 = \frac{S_{yw}S_{xx} - S_{xy}S_{xw}}{\Delta}, \quad a_0 = \bar{w} - a_1\bar{x} - a_2\bar{y},$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2, \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}), \quad S_{yy} = \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2,$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m y_i, \quad \bar{w} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m w_i.$$

Нелінійні регресійні просторові екстраполяції

Ці екстраполяції також передбачають, що відомі значення географічного поля кількісної ознаки в m просторових точках, як у попередньому випадку.

Загалом нелінійних моделей просторової екстраполяції існує безліч, однак найпростішими і найпопулярнішими є такі нелінійні регресійні просторові екстраполяції:

- білінійна $w_{\text{прогн}}(x, y) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot xy$;
- квадратична $w_{\text{прогн}}(x, y) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot xy + a_4 \cdot x^2 + a_5 \cdot y^2$;
- формула Кларка $w_{\text{прогн}}(x, y) = a_0 \cdot e^{-a_1 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}$;
- формула Медведкова $w_{\text{прогн}}(x, y) = \frac{a_0}{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^{a_1}}$.

Побудова цих екстраполяцій полягає у визначенні відповідних коефіцієнтів на основі масиву спостережень. Для числового визначення коефіцієнтів цих та інших ще складніших формул необхідно застосувати знання та навички спеціальних розділів математики, зокрема числових методів аналізу. Це не входить у предмет вивчення нашого курсу.

4. Методи параметричної екстраполяції

Однопараметрична екстраполяція

Розглянемо факторне географічне поле $u(x, y)$ і результуюче поле $w(u)$. Вважатимемо, що досліднику відомий масив спостережень за цими полями:

№ спостереження	Значення факторного поля u	Значення результуючого поля w
1	u_1	w_1
2	u_2	w_2
...
m	u_m	w_m

Ставиться задача здійснити параметричний прогноз географічного поля w для довільного значення факторного поля u .

Для розв'язання цієї задачі існує регресійна лінійна формула:

$$w_{\text{прогн}}(u) = a_0 + a_1 \cdot u(x, y)$$

Побудова цієї формули полягає у визначенні коефіцієнтів a_0, a_1 .

$$a_1 = \frac{S_{uw}}{S_{uu}}, \quad a_0 = \bar{w} - a_1 \cdot \bar{u}, \quad \text{де}$$

$$S_{uu} = \sum_{i=1}^m (u_i - \bar{u})^2, \quad S_{uw} = \sum_{i=1}^m (u_i - \bar{u})(w_i - \bar{w}),$$

$$\bar{u} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m u_i, \quad \bar{w} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m w_i.$$

Двопараметрична екстраполяція

Розглянемо факторні географічні поля $u_1(x, y), u_2(x, y)$ і результуюче поле $w(u)$. Нехай досліднику відомий масив спостережень за цими полями

№ спостереження	Значення факторного поля u_1	Значення факторного поля u_2	Значення результуючого поля w
1	u_{11}	u_{21}	w_1
2	u_{21}	u_{22}	w_2
...
m	u_{m1}	u_{m2}	w_m

Ставиться задача здійснити параметричний прогноз географічного поля w для довільних значень факторних полів u_1 і u_2 .

Для розв'язання цієї задачі існує регресійна лінійна формула:

$$w_{\text{прогн}}(u_1, u_2) = a_0 + a_1 \cdot u_1(x, y) + a_2 \cdot u_2(x, y).$$

Побудова цієї формули полягає у визначенні коефіцієнтів a_0, a_1, a_2 . Подібна задача вже розглядалася нами раніше, однак, з огляду на відмінність та специфіку теперішніх позначень, ми повторимо розв'язок у термінах і позначеннях саме цієї задачі для зручності роботи дослідника. Отже, на основі масиву спостережень, коефіцієнти прогностичної формули визначаються так:

$$a_1 = \frac{S_{w1} \cdot S_{22} - S_{12} \cdot S_{w2}}{\Delta}, \quad a_2 = \frac{S_{11} \cdot S_{w2} - S_{w1} \cdot S_{12}}{\Delta},$$

$$a_0 = \bar{w} - a_1 \cdot \bar{u}_1 - a_2 \cdot \bar{u}_2,$$

$$\text{де } \Delta = S_{11} \cdot S_{22} - S_{12}^2, \quad \bar{u}_1 = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m u_{i1}, \quad \bar{u}_2 = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m u_{i2},$$

$$\bar{w} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m w_i,$$

$$S_{11} = \sum_{i=1}^m (u_{i1} - \bar{u}_1)^2, \quad S_{22} = \sum_{i=1}^m (u_{i2} - \bar{u}_2)^2, \quad S_{12} = \sum_{i=1}^m (u_{i1} - \bar{u}_1)(u_{i2} - \bar{u}_2),$$

$$S_{w1} = \sum_{i=1}^m (w_i - \bar{w})(u_{i1} - \bar{u}_1), \quad S_{wy} = \sum_{i=1}^m (w_i - \bar{w})(u_{i2} - \bar{u}_2).$$

Багатопараметрична екстраполяція

Розглянемо n факторних географічних полів $u_1(x, y), u_2(x, y), \dots, u_n(x, y)$ і результуюче поле $w(u)$. Нехай досліднику відомий масив спостережень за цими полями. Ставиться задача здійснити параметричний прогноз географічного поля w для довільних значень факторних полів u_1, u_2, \dots, u_n .

Для розв'язання цієї задачі існує регресійна лінійна формула:

$$w_{\text{прогн}}(u_1, u_2, \dots, u_n) = a_0 + \sum_{j=1}^n a_j \cdot u_j(x, y)$$

Побудова цієї формули полягає у визначенні коефіцієнтів a_0, a_1, \dots, a_n .

Тестові завдання

1. Який вид математико-картографічного прогнозу переносить закон поведінки об'єкта в нові значення чинників?

1. Параметричний 2. Просторовий 3. Математичний 4. Часовий
5. Географічний

2. Як виглядає картографічно способом ізоліній квадратичний просторовий прогноз?

1. Сім'я квадратів 2. Сім'я прямих ліній 3. Сім'я картограм
4. Сім'я картодіаграм 5. Сім'я еліпсів

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ В СУСПІЛЬНІЙ ГЕОГРАФІЇ

План

1. Поняття про задачі оптимізації
2. Транспортна задача
3. Знаходження центра найменших відстаней
4. Задача побудови мінімального дерева на графі
5. Задача побудови дерева найменших відстаней на графі

1. Поняття про задачі оптимізації

В суспільно-географічних дослідженнях задачі оптимізації виникають щоразу при проектуванні нового, або вдосконаленні територіальної організації існуючого територіального суспільного комплексу, тому вміння ставити і розв'язувати оптимізаційні задачі має велике науково-практичне значення. Кожна постановка оптимізаційної задачі складається з трьох блоків.

Перший блок: сукупність змінних оптимізації (наприклад x_1, x_2, \dots, x_n). Це ті змінні, значеннями яких у рамках конкретної задачі можна маніпулювати для досягнення оптимального ефекту.

Другий блок: критерій оптимізації. В ньому визначають функцію мети (або по інакшому цільову функцію) від змінних оптимізації (наприклад $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$) і зазначають що потрібно з нею зробити для розв'язання оптимізаційної задачі: максимізувати чи мінімізувати. Це називається критерієм оптимізації.

Третій блок: сукупність обмежень на змінні оптимізації. Їх наявність означає, що змінними оптимізації можна маніпулювати не зовсім будь-як, а в певних заданих рамках. Ці обмеження можуть мати вигляд нерівностей, або рівностей, наприклад $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$, $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, або $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$.

Оптимізаційні задачі бувають лінійними і нелінійними. Якщо цільова функція і всі функції обмежень є лінійними, то всю задачу називають лінійною, інакше оптимізаційна задача вважається і називається нелінійною. В літературі лінійні оптимізаційні задачі інколи називають задачами лінійного програмування.

У загальному випадку постановка оптимізаційної задачі формулюється так: *визначити такі значення змінних оптимізації, при яких досягається оптимум (максимум чи мінімум) цільової функції і задовольняються всі обмеження.*

2. Транспортна задача

Транспортна задача дає змогу спланувати оптимальні перевезення між елементами комплексу регіону, тобто структуру найкращої мережі перевезень. Постановка транспортної задачі передбачає, що територіальний комплекс включає m виробників певної продукції і n її споживачів. Зробимо такі позначення:

a_i - річний обсяг виробництва продукції i -м виробником, $i = 1, 2, \dots, m$; b_j - річний обсяг споживання продукції j -м споживачем, $j = 1, 2, \dots, n$; c_{ij} - вартість перевезення одиниці продукції від i -го виробника до j -го споживача.

Обчислимо сумарні обсяги виробництва і споживання:

$A = \sum_{i=1}^m a_i$, $B = \sum_{j=1}^n b_j$. Якщо $A = B$ то транспортну задачу називають

закритою. Саме такі ми будемо розглядати.

Сформулюємо оптимізаційну задачу за трьома блоками.

Перший блок. Нехай змінними оптимізації є x_{ij} - річні обсяги перевезень від i -го виробника до j -го споживача. Зрозуміло, що цих змінних є $m \cdot n$.

Другий блок. Обчислимо загальну вартість усіх перевезень від виробників до споживачів. Це буде величина $F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$.

Інтереси регіонального рівня полягають у тому, щоб досягнути максимальної економії на перевезеннях. Отже, критерієм оптимізації є

мінімізація функції $F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$.

Третій блок. У цій задачі він включає три підблоки. Перший підблок враховує, що сума всіх поставок продукції від i -го виробника до споживачів рівна обсягу виробництва i -го виробника, тобто

$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i$, $i = 1, 2, \dots, m$. У другому підблоці враховано, що сума всіх поставок продукції від виробників до j -го споживача рівна обсягу

споживання j -го споживача, тобто $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Нарешті

третій підблок нагадує, що обсяги перевезень повинні бути невід'ємними: $x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$. Отже, задача має всього $m + n + m \cdot n$ обмежень на змінні оптимізації.

У загальному випадку маємо довільні значення m і n . Завдання полягає в тому, щоб визначити оптимальні значення обсягів перевезень $x_{ij}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$.

Розв'язання такої транспортної задачі складається з двох етапів. На першому етапі знаходять базовий план перевезень, який задовольняє всі обмеження третього блоку постановки задачі, але може бути ще не оптимальним. На другому етапі базовий план послідовно покращують до тих пір поки буде знайдений остаточний оптимальний розв'язок.

Усі величини, що фігурують у транспортній задачі, записуємо в таку стандартну таблицю:

	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}

Розглянемо реалізацію першого етапу розв'язання, тобто знаходження базового розв'язку. Як і раніше, вважаємо транспортну

задачу закритою. Одним з найпростіших методів є так званий метод «північно-західного кута».

Він полягає в тому, що базові значення обсягів перевезень заповнюють послідовно рядок за рядком зліва направо, починаючи з першого рядка. У кожному i -му рядку беремо відповідний річний обсяг виробництва a_i і просуваємося клітинками вздовж рядка зліва направо з метою роздавання цього обсягу. Якщо в j -й клітинці відповідний j -й споживач ще не отримав потрібної кількості продукції, то даємо йому стільки, скільки є можливим (стільки, скільки йому ще потрібно, або стільки, скільки в нас ще залишилось) і записуємо цю кількість x_{ij} в клітинку. Якщо в j -й клітинці відповідний j -й споживач вже отримав весь необхідний йому обсяг, то пропусаємо цю клітинку, записавши в ній нуль, і йдемо далі. В результаті виконання такого алгоритму отримаємо базовий розв'язок, в якому суми обсягів перевезень у кожному рядку дорівнюють відповідним обсягам виробництва, а суми обсягів перевезень у кожному стовпці дорівнюють відповідним обсягам споживання. Також зрозуміло, що всі отримані обсяги перевезень є або додатними числами, або нулями. Для отриманого базового плану можна підрахувати стартову величину F загальної вартості всіх перевезень.

Далі приступаємо до другого етапу роботи. Тепер потрібно покращити план настільки, щоб він став оптимальним, тобто щоби був

досягнутий мінімум функції
$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}.$$
 Таке покращання

здійснюють у декілька стадій, причому в кожній з них величина F повинна зменшитись. Усі стадії є алгоритмічно однаковими, але кількість їхнього повторення залежить від конкретної задачі.

Розглянемо алгоритм такої стадії. Спочатку звернемо увагу на те, що в базі **в ну** (чи в будь-якому-іншому покращеному) плані перевезень багато величин x_{ij} дорівнюють нулю, і лише деяка частина з них є додатними. Ті клітинки, в яких величини x_{ij} є додатними, домовимось називати «поміченими», а всі інші – «непоміченими». Застосуємо популярний метод потенціалів. Позначимо через u_1, u_2, \dots, u_m «потенціали» виробників, а через v_1, v_2, \dots, v_n – «потенціали» споживачів. Для їх визначення розв'яжемо таку систему

лінійних алгебраїчних рівнянь: $u_i + v_j = c_{ij}$ для кожної «поміченої» клітинки таблиці, причому для визначеності покладемо $u_1 = 0$.

Ця система легко розв'язується вручну і отримуються значення u_1, u_2, \dots, u_m та v_1, v_2, \dots, v_n . Зрозуміло, що для «помічених» клітинок таблиці різниця $c_{ij} - (u_i + v_j)$ дорівнює нулю, однак для інших клітинок вона може мати інші значення. Обчислимо різницю $c_{ij} - (u_i + v_j)$ для всіх «непомічених» клітинок і звернемо увагу на знаки отриманих різниць. Якщо серед таких різниць нема жодної від'ємної, то це означає, що біжучий план обсягів перевезень x_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$ вже є оптимальним, тобто розв'язок транспортної задачі отриманий і процес можна завершувати.

Якщо ж серед різниць $c_{ij} - (u_i + v_j)$ для «непомічених» клітинок є від'ємні числа, то стадія продовжується. Серед усіх таких від'ємних чисел вибираємо найбільше за модулем число і відповідну клітинку оголошуємо «ведучою». Починаючи з «ведучої» клітинки прокладаємо в таблиці замкнений маршрут, вузловими точками якого є обов'язково «помічені» клітинки. У вузлових точках маршрут може здійснювати повороти лише під прямим кутом (90°). Далі, кожну вузлову клітинку маршруту по чергово позначаємо знаками «+» і «-», причому стартова «ведуча» клітинка отримує знак «+». Серед клітинок маршруту, які позначені знаком «-», звертаємо увагу на ту, що має найменший обсяг перевезень. Цей обсяг (позначимо його через \tilde{x}) будемо використовувати для покращання плану. Для цього знову проходимо вузловими клітинками маршруту і в тих клітинках, що позначені знаком «+», замінюємо існуючий обсяг x_{ij} на $x_{ij} + \tilde{x}$, а в тих, що позначені знаком «-», замінюємо число x_{ij} на число $x_{ij} - \tilde{x}$. В результаті отримаємо новий план перевезень. На практиці його доцільно записати в новій таблиці і в цій таблиці буде новий набір «помічених» клітинок. Для нового плану доцільно обчислити нове значення величини F і порівняти його з попереднім.

На цьому завершується процес однієї стадії і, якщо план перевезень ще не оптимальний, то починаємо другу стадію, тобто визначаємо нові потенціали u_1, u_2, \dots, u_m та v_1, v_2, \dots, v_n і так далі.

3. Знаходження центра найменших відстаней

Нехай на території знаходяться M виробників (споживачів) певної продукції, координати яких (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, M$. Позначимо через p_i , $i = 1, \dots, M$ значення деякого абсолютного показника, що характеризує обсяг виробництва (споживання) продукції. Ставиться задача визначити координати (X, Y) розподільчого центра, що приймає цю продукцію, для якого зважена сума відстаней до виробників (споживачів) є мінімальною. Сформулюємо задачу за блоками.

Перший блок. Нехай змінними оптимізації є дві координати X, Y .

Другий блок. Відстань від розподільчого центра до i -го виробника (споживача) обчислимо за формулою Евклідової відстані $\sqrt{(x_i - X)^2 + (y_i - Y)^2}$. Тоді зважену суму відстаней можна записати так:

$$S(X, Y) = \sum_{i=1}^M p_i \cdot \sqrt{(x_i - X)^2 + (y_i - Y)^2}.$$

Критерієм оптимальності є мінімум суми $S(X, Y)$.

Третій блок. Специфічних обмежень у цій задачі нема, однак потрібно контролювати, щоб отриманий розв'язок X, Y належав до ареалу досліджуваної території.

Мінімізація зваженої суми відстаней означає визначення координат (X, Y) з умови: $\min_{X, Y} S(X, Y)$. Ця умова через необхідні умови екстремуму приводиться до системи двох нелінійних рівнянь відносно X, Y :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial X} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial Y} = 0 \end{cases},$$

або в розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^M \frac{p_i \cdot (x_i - X)}{\sqrt{(x_i - X)^2 + (y_i - Y)^2}} = 0 \\ \sum_{i=1}^M \frac{p_i \cdot (y_i - Y)}{\sqrt{(x_i - X)^2 + (y_i - Y)^2}} = 0 \end{cases}.$$

Цю систему розв'язують відносно X, Y числовими методами.

4. Задача побудови мінімального дерева на графі

Розглянемо оптимізаційну задачу на неорієнтованому графі, яка у словесній формі звучить так: заданий повнозв'язний граф з відомими відстанями між вузлами (довжинами ребер). Виділити в ньому дерево, яке має мінімальну сумарну довжину ребер. Така задача має очевидну практичну цінність, бо фактично дає змогу спроектувати найдешевшу комунікаційну мережу між заданою множиною вузлів.

Нехай n - кількість вузлів повнозв'язного графа, d_{jl} - задані відстані між вузлами з номерами j та l : $j, l = 1, 2, \dots, n$. Розглянемо блоки постановки оптимізаційної задачі.

Перший блок. Нехай змінними оптимізації є величини x_{jl} : $j, l = 1, 2, \dots, n$. Вважатимемо, що ці змінні можуть приймати значення лише 0 або 1, причому $x_{jl} = 0$, якщо у виділеному дереві вузлами з номерами j та l не з'єднані ребром, і $x_{jl} = 1$, якщо в оптимальному дереві існує ребро між вузлами j та l (Покладаємо, що $x_{jj} = 0$, бо вузол сам з собою ребром не зв'язаний). Легко бачити, що сукупність змінних оптимізації утворює симетричну квадратну матрицю розміром $n \times n$.

Другий блок. Очевидно, що сумарну довжину ребер виділеного дерева можна обчислити як $F = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n d_{jl} x_{jl}$. Тому критерієм оптимальності є мінімізація саме так обчисленої функції F .

Третій блок. Він включає три підблоки. Перший підблок нагадує, що величини x_{jl} можуть приймати значення лише 0 або 1. Другий підблок фіксує той факт, що в графі-дереві кількість ребер завжди на

одиницю менша, ніж кількість вузлів, отже $\sum_{j=1}^n \sum_{l=j+1}^n x_{jl} = n-1$. Нарешті

третьій підблок забезпечує, щоби в отриманому графі не було ізольованих вузлів. Цього можна досягнути, якщо поставити вимогу щоб у кожному рядку (чи стовпці) матриці $\{x_{jl}\}$ сума елементів була

строго додатною, тобто $\sum_{l=1}^n x_{jl} > 0, j = 1, 2, \dots, n$.

Незважаючи на таку складну постановку, ця задача має досить просте алгоритмічне вирішення. Його процедура виглядає так.

Розглянемо всі додатні відстані d_{jl} і впорядкуємо їх за зростанням від найменшої до найбільшої. В такому ж порядку будемо їх розглядати. Спочатку виберемо найменшу відстань і включимо відповідне ребро до шуканого графа. Далі візьмемо наступну за величиною відстань і також включимо відповідне ребро до шуканого графа. В наступних кроках процедури беремо наступні за величиною відстані, але щоразу дивимось, чи приводить включення відповідного ребра до утворення циклу в графі. Якщо цикл утворюється, то таку відстань пропускаємо і беремо наступну. Якщо циклу нема, то включаємо відповідне ребро до шуканого графа. Процедура завершується, коли кількість ребер досягає величини на одиницю меншої, ніж кількість вузлів, що є ознакою дерева.

5. Задача побудови дерева найменших відстаней на графі

При роботі з графовими моделями мереж часто виникає задача визначити найкоротшу відстань від певного вибраного вузла до деякого іншого. Виявляється, що ця задача еквівалентна задачі про визначення найкоротших відстаней від вибраного вузла до всіх інших вузлів графа. Тому саме так ми її і розглянемо.

Отже, поставимо таку задачу. Заданий неорієнтований граф з відомими довжинами ребер. Для вибраного вузла цього графа побудувати дерево найменших відстаней до всіх інших вузлів графа. Цього разу ми не будемо розписувати постановку задачі за блоками, бо вона досить громіздка і не дає додаткової інформації для розуміння алгоритму розв'язання.

Розглянемо алгоритм розв'язання цієї задачі. Потрібно відразу відзначити таку особливість, що хоча заданий граф є неорієнтованим,

але шукане дерево найкоротших відстаней до інших вузлів буде орієнтованим. У ньому ребра будуть мати орієнтацію, що спрямована від вибраного вузла до кожного кінцевого. Саме тому орієнтовані ребра шуканого дерева ми будемо називати дугами.

Розпочнемо алгоритм з вибраного вузла і надамо йому значення потенціалу рівне нулю, тобто для цього вузла $\varphi = 0$. Розглянемо всі вузли, суміжні з початковим, і надамо їм потенціал, рівний відомій заданій відстані від початкового вузла. Ребра, що сполучають початковий вузол з суміжними, перетворимо в орієнтовані дуги. Далі потрібну кількість разів виконаємо процедуру, що полягає в наступному.

Розглянемо вузли, які є вільними кінцями попередньо утворених дуг і серед них виділимо ті, які з'єднані ребрами. Дослідимо кожну таку пару вузлів.

Нехай два таких вузли з'єднані ребром довжини L . Якщо потенціали цих вузлів рівні, то з'єднує ребро не увійде до шуканого дерева найменших відстаней. Тому припустимо, що вони різні і менший потенціал позначимо через φ_{\min} , а більший позначимо як φ_{\max} . Обчислимо величину $L - (\varphi_{\max} - \varphi_{\min})$. Якщо серед таких різниць (для усіх кінців дуг, з'єднаних ребрами) нема жодної від'ємної, то жодне з'єднує ребро не включаємо до дерева найменших відстаней. Якщо ж від'ємні різниці $L - (\varphi_{\max} - \varphi_{\min})$ є, то знаходимо серед них найбільшу за модулем і працюємо з відповідними вузлами. З'єднує ребро перетворюємо в дугу з напрямком від φ_{\min} до φ_{\max} , а дугу, яка підходила до вузла з потенціалом φ_{\max} , перетворюємо назад у ребро. При цьому, вузлу, що мав потенціал φ_{\max} , приписуємо новий потенціал $\varphi_{\min} + L$. В результаті отримуємо нову множину вільних кінців дуг і повторюємо процедуру ще раз з початку.

Описану процедуру повторюємо до тих пір, поки вичерпаються вузли заданого графа

Тестові завдання

1. Яку властивість оптимізаційної задачі визначає третій блок її постановки ?

1. лінійність
2. квадратичність
3. оптимум
4. критерій
5. обмеження

2. Як називають лінійні оптимізаційні задачі ?

1. лінійне планування
2. лінійна інтерполяція
3. лінійне програмування
4. лінійне інтегрування
5. лінійне диференціювання

3. Що є змінними оптимізації в транспортній задачі ?

1. вартість перевезень
2. обсяги перевезень
3. обсяги виробництва
4. обсяги споживання
5. вартість виробництва

4. Що є критерієм оптимізації в транспортній задачі ?

1. міні вартості перевезень
2. міні часу перевезень
3. швидкість перевезень
4. максимум вартості перевезень
5. максимум часу перевезень

5. Що є змінними оптимізації в задачі знаходження центра найменших відстаней ?

1. обсяги виробництва
2. обсяги споживання
3. обсяги перевезень
4. координати центра
5. вартість перевезень

6. Що є критерієм оптимізації в задачі знаходження центра найменших відстаней ?

1. міні вартості перевезень
2. міні суми відстаней
3. швидкість перевезень
4. максимум суми відстаней
5. максимум часу перевезень

Рекомендована література

Базова

1. *Шаблій О. І.* Математичні методи в соціально-економічній географії. – Львів: Світ, 1994.
2. *Грицевич В.С.* Математичні моделі в демогеографії. Текст лекції. – Львів: Вид. центр ЛНУ імені Івана Франка. -2003.
3. *Яцура В.В., Сенишин О.С., Горинь М.О.* Соціально-економічне прогнозування: Навч. посібник. – Львів: Вид. центр ЛНУ імені Івана Франка, 2010.
4. *Глівенко С.В., Соколов М.О., Теліженко О.М.* Економічне прогнозування: навчальний посібник. – Суми: ВТД Університетська книга, 2004.

Допоміжна

5. *Грицевич В.С.* Підходи до математико-географічного вивчення суспільно-географічного положення // Наукові записки Тернопільського педуніверситету. Серія: геогр. №2, 2000. -Тернопіль, -С.46-50.
6. *Грицевич В.С.* Моделювання територіальних систем у суспільно-географічній науці // Вісник Львів. ун-ту. Сер. географія. Вип. 29. Ч.2. -Львів, 2003. -С.8-12.
7. *Грицевич В.С.* Математико-географічна оцінка господарської спеціалізації регіону // Наукові записки Тернопільського педуніверситету. Серія: геогр. №1, 2003. -Тернопіль, -С.72-76.
8. *Грицевич В.С.* Картографічна інтерпретація багатовимірної таксономізації в суспільно-географічних дослідженнях // Вісник геодезії та картографії. №3, 2005. –С.34-38.
9. *Грицевич В.С.* Математико-географічні основи менеджменту демографічною ситуацією регіону // Матер. міжнар. наук.-практ. конф. „Регіон-2007: Стратегія оптимального розвитку”. –Харків: Вид. центр ХНУ, 2007. С.28-31.
10. *Грицевич В.С.* Узагальнення правила Ціпфа для суспільно-географічних досліджень // Науковий вісник Волинського національного ун-ту імені Лесі Українки. №1, 2008. –Луцьк: РВВ "Вежа". –С.78-83.
11. *Грицевич В.С.* Моделювання функціональних закономірностей в географії суспільства // Часопис соціально-економічної географії. - Вип. 4(1). -Харків, 2008. -С.41-44.
12. *Грицевич В.С.* Система ієрархічних форм геопросторової організації територіальних суспільних комплексів // Часопис соціально-економічної географії. -Вип. 5(1). -Харків, 2009. -С.55-61.

Інші публікації автора з математичної географії та суміжних питань

13. Грицевич В.С. Територіальна структура соціально-економічних систем. Текст лекції. -Львів: Ред.-видав. відділ Львів. держ. ун-ту, 1997. -16 с.

14. Грицевич В.С. Геостатистичний аналіз топонімії населених пунктів українсько-польського прикордоння // Економіко-, соціально- і еколого-географічні проблеми західноукраїнського прикордоння. - Львів: Ред.-вид. відд. Львів. ун-ту, 1997. -С.100-105.

15. Дністрянський М.С., Грицевич В.С. Деякі методологічні й методичні підходи до оцінки адміністративно-територіального устрою України // Географія України (регіональні проблеми). Вісник Львів. ун-ту. Сер. географія. Вип. 21. -Львів, 1998. -С.80-86.

16. Грицевич В.С. Євген Святловський і центрографічний метод // Вісник. Вип. 43. 1998. Географія. -К.: РВЦ Київський університет. - С.75-76.

17. Грицевич В.С. Математико-географічні підходи до визначення інтегрального потенціалу територіальних систем // Наукові записки Тернопільського педуніверситету. Серія: географічна. №1, 1999. - Тернопіль, -С.72-75.

18. Грицевич В.С. Оптимізація відтворювального потенціалу трудових ресурсів Львівщини // Вісник Львів. ун-ту. Серія геогр. 1999. Вип. 24. -С.52-55.

19. Шаблій О.І., Грицевич В.С. Матричний підхід до класифікації напрямків географії суспільства // Україна: географічні проблеми сталого розвитку. Зб. наук. праць. -К.: ВГЛ Обрії, 2004, Т 4. -С.151-153.

20. Грицевич В.С. Територіальний операційний менеджмент міграцій трудових ресурсів між містом і селом // Географічні проблеми розвитку продуктивних сил України. Матер. IV Всеукр. наук. конф. – К.:ВГЛ "Обрії", 2007. С.90-91.

21. Грицевич В.С. Статистичні ознаки та характеристики їхньої центральної тенденції: Тексти лекцій. -Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2008. –44 с.

22. Грицевич В.С. Деморесурсний потенціал територій в аспекті геоінформаційного менеджменту // Географія в інформаційному суспільстві. Зб. наук. праць. Т.2. –К.: ВГЛ Обрії, 2008. –С.43-44.

23. Грицевич В.С. Визначення координат Географічного Центра України // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики. Матеріали конференції. -Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2009. –С.70-71.

24. Грицевич В.С. Суспільно-географічні застосування інтелектуального аналізу демографічних даних на прикладі Львівського регіону // Матеріали III Всеукр. наук.-практ. конф. «Географія та екологія: наука та освіта». –Умань, 2010. –С.49-51.

25. Грицевич В.С. Застосування нейромереж Кохонена для демографічної таксономізації регіону // Проблеми розвитку прикордонних територій та їх участі в інтеграційних процесах: Матеріали VII Міжнар. наук.-практ конф. –Луцьк: Волинський нац. ун-т ім. Лесі Українки. 2010. –С.435-438.

26. Грицевич В.С. Методичні основи вивчення демографічної самоорганізації регіону в світлі інтелектуального аналізу даних // Регіональні проблеми України: географічний аналіз та пошук шляхів вирішення. Збірник наукових праць. –Херсон: ПП Вишнемірський, 2011. –С.88-96.

27. Грицевич В.С. Тополого-географічний аналіз регіонального устрою України // Наукові записки Тернопільського національного педагогічного університету. Серія : Географія, №2. – Тернопіль, 2011. – С. 60–66.

28. Грицевич В.С. Методи математико-географічного моделювання територіальної мобільності населення // Часопис соціально-економічної географії. -Вип. 10(1). -Харків, 2011. -С.53-57.

29. Грицевич В.С. Моделювання системи розселення регіону на основі фрактального підходу до теорії центральних місць // Географія та екологія: наука і освіта. –Умань, 2012. –С.51-53.

30. Грицевич В.С. Методичні підходи до вивчення та картографування динаміки суспільно-географічних явищ // Географія, екологія, туризм: теорія, методологія, практика. Матеріали міжнар. наук.-практ. конф. –Тернопіль: СМП “Тайп”, 2015. –С.171-172.

Зміст

Кількісні методи часового прогнозування	3
Методи математико-картографічного прогнозування	8
Методи оптимізації в суспільній географії	18
Рекомендована література	28

Навчально-методичне видання

Грицевич Володимир Степанович

Методи математико-географічного прогнозування та оптимізації:
тексти лекцій
напрямку підготовки 6.040104 – географія

Підготовлено до друку 19.04.2016 формат 60*84/16
Умовн. друк.арк.
Наклад 50 прим.

Малий видавничий центр
Лабораторія тематичного картографування географічного факультету,
Львівський національний університет імені Івана Франка
Україна, 79000, Львів, вул. П.Дорошенка, 41