УДК 372.853

М. Працьовитий
Національний педагогічний університет
імені М.П. Драгоманова
Ю. Одинець
Чернігівський державний педагогічний університет
імені Т.Г. Шевченка

ГЕОМЕТРІЯ МАС І БАРИЦЕНТРИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПЛАНІМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

У статті подано деякі рекомендації щодо можливостей надавати обдарованим з математики учням поштовх до виходу за межі програмного матеріалу. У ній пропонується відносно замкнена система навчального матеріалу про центр мас (центроїд) системи точок і центр мас (барицентр) системи матеріальних точок та барицентричний метод розв'язування геометричних задач для школярів, які цікавляться математикою, її методами і зв'язками з фізикою, а також для майбутніх вчителів математики – студентів педагогічних університетів, які вивчають систему методів розв'язування планіметричних задач та принципи їх гармонізації. Обґрунтовується доцільність знайомства школярів з барицентричним методом і ефективність координатно-векторного методу побудови теорії, висвітлюються взаємозв'язки фізичного та метричного підходів до ключових понять теми, пропонуються методичні рекомендації та ряд застережень.

Ключові слова: *навчання математики, підготовка майбутніх вчителів, робота з обдарованими школярами, урізноманітнення математичних методів, центроїд, барицентр, центр мас, планіметрична задача, барицентричний метод, координатно-векторний метод, геометрія мас.*

Постановка проблеми. *Геометрія* – одна з найстаріших галузей математики, яка вивчає геометричні форми та просторові відношення, зокрема, геометричні величини перетворення просторів і фігур. *Геометрична задача* – це *вимога* при наперед заданих математичних умовах *обчислити* (знайти числове значення інваріанта або геометричної величини: довжини, площі, об'єму, величини кута тощо), *виразити* (знайти вираз), *довести* твердження, *побудувати* фігуру чи комбінацію фігур, *дослідити* (геометричний об'єкт). *Планіметрична задача* має свої особливості, передусім, завдяки своєму візуальному натуралізму геометричних об'єктів (геометричних форм і геометричних величин), що в ній фігурують. Інтегральна властивість «вміння розв'язувати» планіметричні задачі важко адекватно означити та структурувати. Ще складніше диференційовано діагностувати це вміння. Разом із цим, як реальність його можна окреслити й усвідомлено розслоїти.

Знайомство з новими ідеями, прийомами і методами розв'язування задач елементарної геометрії – це не лише шлях збагачення учня геометричними знаннями й удосконалення вміння розв'язувати задачі, а й надійний засіб зародження та розвитку інтересу до математики та її застосувань, можливостей розвивати й виховувати. Усе це посилює мотиваційні основи процесу навчання.

Ідеї геометрії мас, що зародились ще до нашої ери, складають фундамент барицентричного методу – потужного методу розв'язування позиційних та метричних задач. Вони успішно можуть бути реалізовані в класах з поглибленим вивченням математики, у фізико-математичних школах, у системі позакласної роботи, зокрема гурткової, у науково-дослідницьких проектах (прикладом такої шкільної реалізації ми знаходимо у навчальному посібнику [5]). Але для більшої ефективності слід вдало збалансувати навчальний матеріал, викласти його з єдиних теоретичних позицій, наситити вдалими прикладами та контрприкладами, сформувати добірку різнопланових задач навчального та дослідницького характеру. Це мало би бути корисним вчителю і учню (особливо тому, що психологічно готовий виходити за межі шкільної програми з математики) та забезпечити основу для гармонізації геометричних методів. Нажаль нам невідомі такі джерела, хоча достатньо багатий матеріал містить робота [1].

Термін *барицентр* походить від двох грецьких слів βαρύς — важкий і κέντρον — центр. Він рівнозначний термінам «центр мас» та «центр ваги». Існує кілька наукових понять, безпосередньо пов'язаних з цим терміном. Це суто математичне поняття – *центр мас системи точок* (або центроїд, або барицентр) та центр мас геометричної фігури і фізичне поняття – *центр мас системи матеріальних точок (*або *барицентр)* та центр мас фізичного тіла, які в математиці теж продуктивно використовується за умови, що «геометричні точки мають однакову масу», а маса фігури пропорційна її мірі (довжині, площі, об'єму тощо).

Видатний давньогрецький мислитель Архімед, що жив в ІІІ ст. до н.е., першим усвідомив продуктивність поняття «центра мас системи матеріальних точок» і великі можливості застосування його до розв'язування математичних (геометричних) задач, зокрема ним з використанням властивостей центра мас доводилась властивість медіан трикутника. Пізніше ідеї Архімеда застосовувались різними відомими геометрами (Папп, Чева, Гюльден, Люільє та ін.). Сьогодні цей спосіб доведення математичних фактів називають *барицентричним методом*.

Сучасний компактний і замкнений виклад геометрії мас (теорії про центр мас) ґрунтується на векторній алгебрі, тобто має векторну форму. Але зрозуміло, що теорія векторів з'явилась значно пізніше первинних ідей Архімеда, які мали суто механічне тлумачення.

Геометрія мас як розділ класичної геометрії практично не представлений у сучасних навчальних курсах (шкільних та університетських), барицентричний метод розв'язування геометричних задач є маловідомим як для школярів, так і для вчителів математики, вивчення барицентричної системи координат не передбачено навчальною програмою з аналітичної геометрії для студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів. Це є серйозною перепоною для формування цілісного погляду на ідейне багатство геометричних методів, їх органічної єдності, тісні міжпредметні зв'язки фізики та геометрії тощо. Сьогодні бракує якісного елементарного викладу збалансованої теорії геометрії мас з єдиних теоретичних позицій системи навчального матеріалу за концентричним принципом.

Мета статті – здійснити виклад геометрії мас виключно на векторній основі, вказати альтернативи для побудови теорії (знайти еквівалентні означення, вказати різні методи обґрунтування тверджень), запропонувати терміноголічні розмежування.

1. Центр мас (центроїд) системи точок евклідової площини

***Означення* 1.** *Центроїдом (центром мас* або *барицентром*) системи точок A_1, A_2, …, A_n називається точка G, для якої має місце векторна рівність

$$\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\ldots+\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}. \qquad (1)$$

Теорема 1.1. *Довільна скінченна множина (система) точок площини $A_1, A_2, \ldots, A_n$ має єдиний центр мас (центроїд) G.*

Доведення (І спосіб). Доведення існування барицентра проведемо методом математичної індукції.

1. При $n=2$ система містить дві точки. Тому, очевидно, що центроїдом є середина G відрізка A_1A_2, оскільки вектори $\overrightarrow{GA_1}$ і $\overrightarrow{GA_2}$ є протилежними.

2. Припустимо, що твердження правильне для $n=k$, тобто існує точка G' така, що

$$\overrightarrow{G'A_1}+\overrightarrow{G'A_2}+\ldots+\overrightarrow{G'A_k}=\vec{0}. \qquad (2)$$

Розглянемо точку G, яка ділить напрямлений відрізок $\overline{A_{k+1}G'}$ у відношенні *k*, тобто точку, для якої має місце векторна рівність

$$\overrightarrow{A_{k+1}G}=k\overrightarrow{GG'}. \qquad (3)$$

Останню рівність можна переписати у вигляді

$$\overrightarrow{A_{k+1}G}=\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{A_1G'}+\overrightarrow{GA_2}+\overrightarrow{A_2G'}+\cdots+\overrightarrow{GA_k}+\overrightarrow{A_kG'},$$

$$\overrightarrow{G'A_1}+\overrightarrow{G'A_2}+\cdots+\overrightarrow{G'A_k}=\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\overrightarrow{GA_k}+\overrightarrow{GA_{k+1}}.$$

Але з (2) випливає, що ліва частина останньої рівності дорівнює $\vec{0}$. Тому

$$\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\overrightarrow{GA_k}+\overrightarrow{GA_{k+1}}=\vec{0}.$$

Отже, точка *G* є центром мас системи точок $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$. Тоді, згідно з принципом математичної індукції, дане твердження правильне для довільної скінченної кількості точок. Існування доведено.

Тепер доведемо єдиність. Нехай крім рівності (1) має місце і рівність

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}. \qquad (4)$$

Віднявши від рівності (1) рівність (4), одержимо

$$\left(\overrightarrow{GA_1}-\overrightarrow{OA_1}\right)+\left(\overrightarrow{GA_2}-\overrightarrow{OA_2}\right)+\ldots+\left(\overrightarrow{GA_n}-\overrightarrow{OA_n}\right)=\vec{0},$$

$$n\overrightarrow{GO}=\vec{0}.$$

Звідки $G=O$. Єдиність та все твердження доведено.

II спосіб (координатний). Розглянемо на площині прямокутну декартову систему координат (ПДСК). У ній задані точки мають власні координати. Нехай $A_i(x_i;y_i)$, $i=1,2,\ldots,n$, $G(x;y)$. Тоді вектор $\overrightarrow{GA_i}$ має координати $(x_i-x;y_i-y)$, а вектор $\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\overrightarrow{GA_n}$ — координати

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n-nx;y_1+y_2+\cdots+y_n-ny).$$

Тому рівність (1) у координатній формі рівносильна системі

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_n-nx=0,\\ y_1+y_2+\cdots+y_n-ny=0.\end{cases}$$

Звідки

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n),\\ y=\dfrac{1}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n).\end{cases}$$

Отримана система є завершенням доведення існування та єдиності центроїда. Теорему доведено.

Зауваження. Остання система рівностей дозволяє знаходити координати центроїда за координатами точок системи: *кожна з координат є середнім арифметичним відповідних координат точок системи.*

Очевидно, що центроїдом системи двох точок A_1 і A_2 є середина відрізка, що їх з'єднує. Легко довести, що центром мас трьох точок, що є вершинами трикутника, співпадає з точкою перетину медіан цього трикутника.

Задача. Де міститься барицентр системи чотирьох точок площини?

Розв'язання. Нехай $ABCD$ плоский чотирикутник, K,L,M,N — середини сторін AB,BC,CD,DA відповідно. Тоді чотирикутник $KLMN$ — паралелограм, оскільки MN — середня лінія трикутника ACD, яка паралельна основі AC, а KL — середня лінія трикутника ACB, яка теж паралельна AC. Тоді для точки O перетину діагоналей паралелограма $KLMN$ виконується векторна рівність

$$\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OM}=\vec{0}.$$

Але $\overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$, $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$. Тому має місце рівність

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0},$$

тобто шуканий центр мас системи чотирьох точок, що є вершинами чотирикутника, є точкою перетину відрізків, що з'єднують середини його протилежних сторін, або (що рівносильно) серединою відрізка, що з'єднує середини двох протилежних сторін чотирикутника.

Нехай тепер A, B, C, D — чотири різні точки площини, що не є вершинами чотирикутника. Розглянемо середину O відрізка KM, де K — середина AB, M — середина BC. Тоді $\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM} = \vec{0}$ і знову $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$, а отже, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. Тому O – центр мас системи точок A, B, C, D.

Зауважимо, щойно наведені міркування проходять і для випадку, коли точки є вершинами чотирикутника. Отже, можна зробити висновок: центром мас системи чотирьох точок є середина відрізка, що з'єднує середини відрізків визначених парами заданих точок.

Лема 1.1. Точка G є центроїдом системи точок $A_1, A_2, \dots, A_n$ тоді і тільки тоді, коли для будь-якої точки O має місце рівність

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n}\right). \quad (5)$$

Доведення. Рівність (5) можна записати у вигляді

$$n\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n}$$

або $$\left(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OG}\right) + \left(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OG}\right) + \dots + \left(\overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OG}\right) = 0.$$

А це рівносильно рівності (1). Лему доведено.

Зауваження. Дане твердження приводить до еквівалентного означення центроїда системи точок, тобто в основу його означення можна покласти рівність (5).

Пропонуємо читачеві самостійно розв'язати задачу на знаходження *центроїда системи точок, що є вершинами правильного п'ятикутника (n-кутника)? А також вказати алгоритм побудови його за допомогою циркуля та лінійки, коли п'ятикутник заданий.*

2. Метрична характеристика центроїда

Теорема 2.1. *Точка, сума квадратів відстаней якої від точок площини $A_1, A_2, \dots, A_n$ є найменшою, співпадає з центроїдом цієї системи точок.*

Доведення. Скористаємось методом координат. Для цього на площині розглянемо прямокутну декартову систему координат. В ній точки системи мають свої координати. Нехай $A_i(x_i; y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Знайдемо точку $M(x; y)$, для якої вираз

$$f(M) = |A_1M|^2 + |A_2M|^2 + \dots + |A_nM|^2,$$

набуває найменшого значення. Для цього виразимо

$$f(M) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + \dots +$$
$$+(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2 = nx^2 + ny^2 - 2(x_1 + x_2 + \dots + x_n)x -$$
$$-2(y_1 + y_2 + \dots + y_n)y + (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) =$$
$$= n\left(x - \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)^2 + n\left(y - \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}\right)^2 +$$

$$+\left[(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{n^2}+\right.$$
$$\left.+(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)-\frac{(y_1+y_2+\cdots+y_n)^2}{n^2}\right].$$

Бачимо, що $f(M)$ є сумою трьох доданків, останній з яких (вираз у квадратних дужках) не залежить від точки M. Тому $f(M)$ набуде найменшого значення, коли сума перших двох доданків буде найменшою, тобто коли

$$x-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=0,$$

$$y-\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}=0.$$

А це означає, що точка M має координати, які є середнім арифметичним відповідних координат точок системи, а отже, коли точка M співпадає з центроїдом.

Теорему доведено.

3. Центр мас системи матеріальних точок

Матеріальною точкою називається пара (A, m), де A – точка площини, а m — додатне дійсне число, яке називається *масою точки* A.

Центром мас системи матеріальних точок (*барицентром*)

$$(A_1, m_1), (A_2, m_2), \ldots, (A_n, m_n) \qquad (6)$$

називається така точка G, що

$$m_1\overrightarrow{GA}_1+m_2\overrightarrow{GA}_2+\cdots+m_n\overrightarrow{GA}_n=\vec{0}. \qquad (7)$$

Зауважимо, що при $m_1=m_2=\cdots=m_n$ рівність (7) рівносильна рівності (1).

Теорема 3.1. *Кожна система матеріальних точок має центр мас і він єдиний.*

Доведення. Нехай точки системи мають координати $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, …, $A_k(x_k; y_k)$ і ці матеріальні точки мають відповідні маси m_1, m_2, …, m_k. Знайдемо координати точки $M(x; y)$, що задовольняє означення центра мас. $\overrightarrow{MA_i}$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots, k)$ мають координати $(x_i - x; y_i - y)$. Вектор

$$m_1\overrightarrow{MA_1}+m_2\overrightarrow{MA_2}+\ldots+m_k\overrightarrow{MA_k}$$

має координати

$$\left(\sum_{i=1}^{k} m_i\,(x_i-x); \sum_{i=1}^{k} m_i\,(y_i-y)\right).$$

Вимога: точка M є центром мас рівносильна системі рівнянь

$$\begin{cases} m_1(x_1-x)+m_2(x_2-x)+\ \ldots+m_k(x_k-x)=0,\\ m_1(y_1-y)+m_2(y_2-y)+\ \ldots+m_k(y_k-y)=0, \end{cases}$$

звідки

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}=\frac{\sum_{i=1}^{k}m_i\,x_i}{\sum_{i=1}^{k}m_i},$$
$$y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\cdots+m_ny_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}=\frac{\sum_{i=1}^{k}m_i\,y_i}{\sum_{i=1}^{k}m_i}.$$

Отже, точка $M(x;y)$ існує і єдина.

Наслідок. Координати центра мас системи матеріальних точок, заданих своїми координатами, обчислюються за щойно виведеними формулами.

Зауваження. Теорему 3.1 можна довести методом математичної індукції по аналогії з доведенням теореми 1.1 (пропонуємо читачеві це зробити самостійно).

4. Характеристичні властивості центра мас системи матеріальних точок

Лема 4.1. Центр мас G системи двох матеріальних точок (A_1,m_1) і (A_2,m_2) належить напрямленому відрізку (відрізку, в якому береться до уваги де у нього початок, а де кінець) $\overline{A_1A_2}$ і ділить його у відношенні $\lambda=\frac{m_2}{m_1}$, тобто

$$\overrightarrow{A_1G}=\frac{m_2}{m_1}\overrightarrow{GA_2}.$$

Доведення. Справді, рівність $m_1\overrightarrow{GA_1}+m_2\overrightarrow{GA_2}=\vec{0}$ рівносильна $\overrightarrow{A_1G}=\frac{m_2}{m_1}\overrightarrow{GA_2}$. А отже, $\overrightarrow{A_1G}\uparrow\uparrow\overrightarrow{GA_2}$ і тому $G\in[A_1A_2]$ і $(A_1A_2,G)=\frac{m_2}{m_1}$.

Теорема 4.1 (Основна властивість центра мас). *Якщо задано систему матеріальних точок $(A_1,m_1),\dots,(A_k,m_k)$, $(A_{k+1},m_{k+1}),\dots,(A_{k+n},m_{k+n})$, то центр цієї системи збігається з центром мас системи матеріальних точок $\left(G';\sum_{i=1}^{k}m_i\right)$, $(A_{k+1},m_{k+1}),\dots,(A_{k+n},m_{k+n})$, де G' - центр мас системи матеріальна точок (A_1,m_1), $(A_2,m_2),\dots,(A_k,m_k)$.*

Доведення. Нехай G — центр мас системи матеріальна точок $(A_1,m_1),\dots,(A_k,m_k),(A_{k+1},m_{k+1}),\dots,(A_{k+n},m_{k+n})$, тобто

$$m_1\overrightarrow{GA}_1+m_2\overrightarrow{GA}_2+\cdots+m_{k+n}\overrightarrow{GA}_{k+n}=\vec{0}.$$

Якщо Q - центр мас системи матеріальних точок $\left(G';\sum_{i=1}^{k}m_i\right)$, $(A_{k+1},m_{k+1}),\dots,(A_{k+n},m_{k+n})$, то

$$\left(\sum_{i=1}^{k}m_i\right)\overrightarrow{QG'}+m_{k+1}\overrightarrow{QA}_{k+1}+\cdots+m_{k+n}\overrightarrow{QA}_{k+n}=\vec{0}.$$ Звідки

$$m_1\overrightarrow{QG'}+m_2\overrightarrow{QG'}+\cdots+m_k\overrightarrow{QG'}+m_{k+1}\overrightarrow{QA}_{k+1}+\cdots+m_{k+n}\overrightarrow{QA}_{k+n}=\vec{0},$$
$$m_1\left(\overrightarrow{QA}_1+\overrightarrow{A_1G'}\right)+\cdots+m_k\left(\overrightarrow{QA}_k+\overrightarrow{A_kG'}\right)+$$
$$+m_{k+1}\overrightarrow{QA}_{k+1}+\cdots+m_{k+n}\overrightarrow{QA}_{k+n}=\vec{0},$$
$$m_1\overrightarrow{QA}_1+m_2\overrightarrow{QA}_2+\cdots+m_k\overrightarrow{QA}_k+$$
$$+\left(m_1\overrightarrow{A_1G'}+m_2\overrightarrow{A_2G'}+\cdots+m_k\overrightarrow{A_kG'}\right)+m_{k+1}\overrightarrow{QA}_{k+1}+\cdots+m_{k+n}\overrightarrow{QA}_{k+n}$$
$$=\vec{0}$$

Оскільки G' - центр мас системи матеріальних точок (A_1, m_1), $(A_2, m_2), \dots, (A_k, m_k)$, то $m_1\overrightarrow{G'A}_1 + m_2\overrightarrow{G'A}_2 + \dots + m_k\overrightarrow{G'A}_k = \vec{0}$, що рівносильно $m_1\overrightarrow{A_1G'} + m_2\overrightarrow{A_2G'} + \dots + m_k\overrightarrow{A_kG'} = \vec{0}$. Тому має місце рівність $m_1\overrightarrow{QA}_1 + m_2\overrightarrow{QA}_2 + \dots + m_k\overrightarrow{QA}_k + m_{k+1}\overrightarrow{QA}_{k+1} + \dots + m_{k+n}\overrightarrow{QA}_{k+n} = \vec{0}$. Отже, Q є центром мас всієї системи матеріальних точок.

Теорема 4.2. 1) *Якщо точка G є центром мас системи матеріальних точок (5), то при будь-якому виборі точки O виконується рівність*

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_1 + m_1 + \cdots m_n}\left(m_1\overrightarrow{GA}_1 + m_2\overrightarrow{GA}_2 + \cdots + m_n\overrightarrow{GA}_n\right). \qquad (8)$$

2) *Якщо хоча би при одному виборі точки O виконується рівність (8), то точка G є центром мас системи (6).*

Доведення. 1) Якщо G - центр мас системи матеріальних точок (6), то вибравши довільну точку O, рівність (7) можна переписати в такій формі:

$$m_1\left(\overrightarrow{OA}_1 - \overrightarrow{OG}\right) + m_2\left(\overrightarrow{OA}_2 - \overrightarrow{OG}\right) + \cdots + m_n\left(\overrightarrow{OA}_n - \overrightarrow{OG}\right) = \vec{0}, \qquad (9)$$

звідки і випливає рівність (8).

2) Нехай має місце рівність (8). Тоді вона рівносильна рівності (9), а рівність (9) рівносильна рівності (7), тобто є G - центр мас системи матеріальних точок (6). Теорему доведено.

5. Тотожності Лагранжа та Якобі

Задача. Нехай $(A_1; m_1), (A_2; m_2), \dots, (A_n; m_n)$ – деяка система матеріальних точок, а G – її центр мас. Тоді для будь-якої точки Q має місце тотожність **Лагранжа**

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot QA_i^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot GA_i^2 + (m_1 + m_2 + \cdots + m_n) \cdot GQ.$$

Розв'язання. Із правила трикутника додавання векторів випливає, що для кожного $i = 1,2, \dots, n$ справедлива рівність $\overrightarrow{A_\iota Q} = \overrightarrow{A_\iota G} + \overrightarrow{GQ}$, звідки $\overrightarrow{A_\iota Q}^2 = \overrightarrow{A_\iota G}^2 + 2\overrightarrow{A_\iota G} \cdot \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GQ}^2$, або

$$m_i \cdot A_iQ^2 = m_iA_iG^2 + 2m_i\overrightarrow{A_\iota G} \cdot \overrightarrow{GQ} + m_iGQ^2. \qquad (10)$$

Додаючи почленно всі рівності типу (10), дістаємо

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot A_iQ^2 = \sum_{i=1}^{n} m_iA_iG^2 + 2\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{A_\iota G} \cdot \overrightarrow{GQ} + \sum_{i=1}^{n} m_iMQ^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_iA_iG^2 - 2\overrightarrow{GQ}\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{A_\iota G} + (m_1 + m_2 + \cdots + m_n) \cdot GQ^2.$$

Оскільки M – центр мас системи точок $(A_1; m_1), (A_2; m_2), \dots, (A_n; m_n)$, то

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{A_i G} = \vec{0},$$

звідки і випливає шукана рівність.

Задача. Якщо G – барицентр системи матеріальних точок $(A_1; m_1), (A_2; m_2), \dots, (A_n; m_n)$, то має місце тотожність **Якобі**:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot GA_k^2 = \frac{1}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \cdot \sum_{1 \le i < j \le n} m_i m_j \cdot A_i A_j^2.$$

Розв'язання. За означенням барицентра маємо

$$m_1 \overrightarrow{GA_1} + m_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + m_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}.$$

Скалярний квадрат обох частин цієї рівності дає

$$\sum_{k=1}^{n} m_k^2 \cdot GA_k^2 + 2 \cdot \sum_{1 \le i < j \le n} m_i m_j \cdot \overrightarrow{GA_i} \cdot \overrightarrow{GA_j} = 0.$$

Звідки

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_n) \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot GA_k^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} m_k^2 \cdot GA_k^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} m_i m_j \cdot \left(GA_i^2 + GA_j^2\right) =$$

$$= \sum_{1 \le i < j \le n} m_i m_j \cdot \left(GA_i^2 + GA_j^2\right) - 2 \cdot \sum_{1 \le i < j \le n} m_i m_j \cdot \overrightarrow{GA_i} \cdot \overrightarrow{GA_j} =$$

$$= \sum_{1 \le i < j \le n} m_i m_j \cdot \left(\overrightarrow{GA_i} - \overrightarrow{GA_j}\right)^2 = \sum_{1 \le i < j \le n} m_i m_j \cdot \overrightarrow{A_i A_j^2},$$

що рівносильно тотожності Якобі.

6. Барицентричний метод розв'язування задач

При розв'язуванні позиційних планіметричних задач часто корисним є поняття центра мас. На його існуванні і властивостях ґрунтується барицентричний метод розв'язування задач, суть якого полягає в переформулюванні задачі у термінах матеріальних точок і використанні трьох основних властивостей центра мас системи матеріальних точок для отримання відповіді на вимогу задачі, тобто він полягає у виборі системи точок, яким приписують певні маси, і застосуванні законів:

1. Існування і єдності центра мас у кожної системи матеріальних точок;
2. Належність центра мас двох матеріальних точок відрізку, що їх з'єднує;
3. Можливість перегрупування матеріальних точок системи без зміни положення центра мас всієї системи.

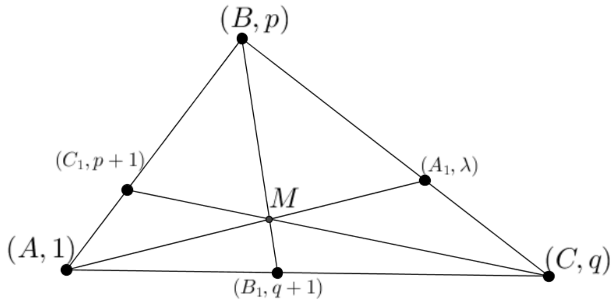
Наведемо приклад застосування цього методу.

Задача. Через точку M трикутника ABC проведено три прямі AA_1, BB_1, CC_1, де точки A_1, B_1, C_1 лежать на сторонах трикутника ABC, при цьому $\overrightarrow{AB_1} = p\overrightarrow{B_1C}$, $\overrightarrow{AC_1} = q\overrightarrow{C_1B}$. Довести формулу Ван-Обеля

$$\overrightarrow{AM} = (p+q)\overrightarrow{MA_1}.$$

Розв'язування. В задачі вимагається знайти λ, при якому $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MA_1}$. Розглянемо три матеріальні точки $(A,1),(B,p),(C,q)$. За умовою

$$\overrightarrow{AB_1} = p\overrightarrow{B_1C} \quad \Leftrightarrow \quad 1\cdot\overrightarrow{B_1A} + p\overrightarrow{B_1C} = \vec{0},$$
$$\overrightarrow{AC_1} = q\overrightarrow{C_1B} \quad \Leftrightarrow \quad 1\cdot\overrightarrow{C_1A} + q\overrightarrow{C_1B} = \vec{0}.$$



Тоді матеріальна точка $(C_1,p+1)$ є центром мас пари матеріальних точок $(A,1)$ і (B,p), а матеріальна точка $(B_1,q+1)$ є центром мас пари матеріальних точок $(A,1)$ і (C,q). При цьому точка M є центром мас системи матеріальних точок $(A,1),(B,p),(C,q)$, оскільки, вона є точкою перетину прямих CC_1 і BB_1. Тепер задача звелась до того, щоб з'ясувати: яку масу слід помістити в точку A_1, щоб точка M була центром мас матеріальних точок (A_1,λ), $(B_1,q+1)$, $(C_1,p+1)$? А це буде тоді, коли (A_1,λ) буде центром мас системи (B,p) і (C,q), тобто коли $\lambda = p+q$. Це і вимагалось довести.

Барицентричним методом легко доводяться наступні твердження.

*1.*Теорема Чеви: *нехай точки A_1, B_1, C_1 лежать відповідно на сторонах BC, AC, AB трикутника ABC. Відрізки AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці M всередині трикутника тоді і тільки тоді, коли*

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

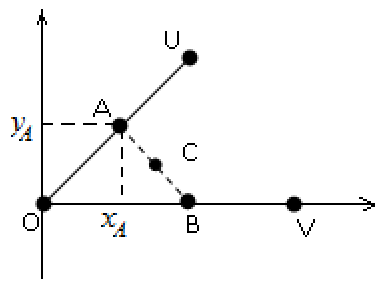
2. Три бісектриси трикутника ABC перетинаються в одній точці I, яка є центром мас системи матеріальних точок $(A;a)$, $(B;b)$, $(C;c)$, де a довжина сторони BC, b — довжина AC, c — довжина AB.
3. Три висоти гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці H, що є центром мас системи точок (A,tgA), (B,tgB), (C,tgC).
4. Відрізки, що з'єднують вершини трикутника з точками дотику вписаного в цей трикутник кола, перетинаються в одній точці.
5. Відрізки, які сполучають вершини трикутника з точками дотику до сторін трикутника зовнівписаних кіл, перетинаються в одній точці.

7. Центр мас дволанкової ламаної

Задача 3.2.1. *Визначити положення центра мас однорідного стержня, зігнутого під кутом φ, якщо довжини його частин рівні відповідно u і v.*

Розв'язання. Нехай OU, OV – прямолінійній частини стержня з довжинами а *і* b відповідно. Оскільки стержень однорідний, то маса частини OU дорівнює ka, а частини $OV - kb$, де k – деяке додатне число.

Центром мас кожної з частин (ланок) є матеріальна точка, маса якої дорівнює довжині ланки. Тоді центром мас ланки OU є матеріальна точка (A, ka), де A – середина відрізка OU, а центром мас ланки *OV* є матеріальна точка (B, kb), де B – середина відрізка *OV*. Тоді центр мас зігнутого стержня є центром мас системи цих двох матеріальних точок, а це буде точка (C, m), де $m = k(a+b)$, а C – точка поділу напрямленого відрізка $\overrightarrow{AB}$ у відношенні $\lambda = \frac{kb}{ka} = \frac{b}{a}$, тобто $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{\lambda CB} = \frac{b}{a}\overrightarrow{CB}$. Тоді у



прямокутній декартовій системі координат Oxy, де $V \in Ox$, маємо $B\left(\frac{b}{2}; 0\right)$, $A(\frac{a}{2}cos\varphi; \frac{a}{2}sin\varphi)$. Тому

$$x_C = \frac{ax_A + bx_B}{a+b} = \frac{a^2cos\varphi + b^2}{2(a+b)}, \qquad y_c = \frac{a^2sin\varphi}{2(a+b)}.$$

8. Центр мас каркасного трикутника

Задача. Знайти центр мас три ланкової замкненої ламаної $ABCA$, якщо у прямокутній декартовій системі координат $A(x_A; y_A)$, $B(x_B, y_B)$ і $C(x_C, y_C)$.

Розв'язання. Центром мас ланки *AB* є матеріальна точка $C_1\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}\right)$ з масою $c = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$; центром мас ланки *BC* є матеріальна точка $A_1\left(\frac{x_B+x_C}{2}; \frac{y_B+y_C}{2}\right)$ з масою $a = BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$; центром мас ланки *CA* є матеріальна точка $B_1\left(\frac{x_C+x_A}{2}; \frac{y_C+y_A}{2}\right)$ з массою $b = CA = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$.

Тоді центром мас всієї системи є точка $G(x; y)$ така, що

$$a\overrightarrow{GA_1} + b\overrightarrow{GB_1} + c\overrightarrow{GC_1} = \vec{0}$$

і

$$x = \frac{a\frac{x_B+x_C}{2} + b\frac{x_C+x_A}{2} + c\frac{x_C+x_A}{2}}{a+b+c} = \frac{a(x_B+x_C) + b(x_C+x_A) + c(x_C+x_A)}{2(a+b+c)},$$

$$y = \frac{a\frac{y_B+y_C}{2} + b\frac{y_C+y_A}{2} + c\frac{y_C+y_A}{2}}{a+b+c} = \frac{a(y_B+y_C) + b(y_C+y_A) + c(y_C+y_A)}{2(a+b+c)}.$$

Відповідь: якщо $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ – довжини сторін, то центр мас межі трикутника ABC має координати

$$x = \frac{a(x_B + x_C) + b(x_C + x_A) + c(x_C + x_A)}{2(a + b + c)};$$
$$y = \frac{a(y_B + y_C) + b(y_C + y_A) + c(y_C + y_A)}{2(a + b + c)}.$$

Висновки. Геометрія мас включає:

1) Теореми існування та єдності центра мас скінченної множини точок та системи матеріальних точок.

2) Критерії центра мас. Еквівалентні означення.

3) Характеристичні властивості центра мас (закони).

4) Барицентричний метод розв’язування планіметричних задач.

5) Центр мас геометричних фігур та фізичних тіл.

6) Барицентрична система координат і метод координат, що на ній ґрунтується.

Пропонуємо розмежувати вживання термінів:

1) термін «центроїд» вживати для системи «геометричних точок» у випадку, коли мова не йде про матеріальні точки;

2) термін «барицентр» вживати у випадку, коли йдеться про скінченну сукупність матеріальних точок;

3) термін «центр мас» вживати як узагальнюючий; зокрема, у випадку, коли або йдеться про нескінченну множину точок, або про систему матеріальних точок, або про геометричну фігуру.

Висновки та перспективи подальших наукових розвідок. Геометрія мас і барицентричний метод розв’язування геометричних задач можуть суттєво збагатити геометричні курси шкільної та вищої математики, вказати ще один «місток» між фізикою та математикою, озброїти учня альтернативним засобом дослідження геометричних об’єктів. Але для цього мало лише популяризувати ідеї цієї галузі математики слід сформувати блок різнопланових задач, розв’язання яких із використанням центра мас є особливо ефективним.

ЛІТЕРАТУРА

1. Балк М. Б. Геометрия масс / М. Б. Балк, В. Г. Болтянский. – М. : Наука, 1987. – 160 с.
2. Кушнір І. А. Методи розв’язання задач з геометрії : Кн. для вчителя / І. А. Кушнір. – К. : Абрис, 1994. – 464 с.
3. Назаренко М. Барицентричні координати та їх застосування для обчислення площі многокутника та об'єму многогранника / М. Назаренко, П. Колесник // Математика в школі. – 2004. – С. 45–50.
4. Никулин А. В. Планиметрия. Геометрия на плоскости / А. В. Никулин, А. Г. Кукуш, О. С. Татаренко. – Альфа, 1998. – 592 с.
5. Нікулін О. В. Геометрія. Поглиблений курс 7-9 клас / О. В. Нікулін, О. Г. Кукуш. – К. : Перун, 1998. – 349 с.
6. Працьовитий М. В. Аналітична геометрія. Векторний простір / М. В. Працьовитий. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2009. – 64 с.

7. Працьовитий М. В. Аналітична геометрія. Метод координат на площині (афінна та прямокутна декартова система координат) / М. В. Працьовитий. – К. : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2013. – 44 с.

8. Працьовитий М. В. Аналітична геометрія і барицентричний метод розв'язання планіметричних задач / М. В. Працьовитий, Ю. А. Одинець // Міжнародна наукова конференція «Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики», Вінниця 26-27 листопада 2015. – С. 199–202.

9. Черноуцан А. Задачи на центр масс / А. Черноуцан // Квант. – 1996. – № 2. – С. 43-45.

РЕЗЮМЕ

Працевитый М., Одинец Ю. Геометрия масс и барицентрический метод решения планиметрических задач.

В статье представлены некоторые рекомендации относительно возможностей оказывать одаренным по математике ученикам толчок к выходу за пределы программного материала. В ней предлагается относительно замкнутая система учебного материала о центре масс системы точек (центроид), центр масс системы материальных точек (барицентра) и барицентрическом методе решения геометрических задач для школьников, которые интересуются геометрией, ее методами и связями с физикой, а также для будущих учителей математики - студентов педагогических университетов, изучающих систему методов решения планиметрических задач и принципы их гармонизации. Обосновывается эффективность координатно-векторного метода построения теории и целесообразность знакомства школьников с барицентрическим методом, освещаются взаимосвязи физического и метрической подходов к ключевым понятиям темы, предлагаются методические рекомендации и ряд предостережений.

Ключевые слова. *Обучение математике, подготовка будущих учителей, работа с одаренными школьниками, разнообразие математических методов, центроид, барицентр, центр масс, планиметрическая задача, барицентрический метод, координатно-векторный метод, геометрия масс.*

SUMMARY

Pratsiovytyi M., Odynets Yu. Geometry of masses and barycenteric method of solving of plane geometry problems.

In the article we put some recommendations on the possibilities to provide to talented math students push out beyond the program material. We propose relatively closed system of educational material on the center of mass. In this paper we propose a relatively closed system of educational material about the center of mass points (centroid), the center of mass of material points (barycenter) and barycenteric geometric method for solving problems for students who are interested in geometry, its methods and connections with physics and for future mathematics teachers that are the students of pedagogical universities studying methods for solving problems of plane geometry and principles of their harmonization. This system includes the theorem of existence and uniqueness of the center of mass and its location and also proofs of basic properties of barycenter. The presentation of theoretical material is complete and strict accompanied by examples and counterexamples, the selection of problems of educational and research character is also available. We justify the expediency of pupils and students of pedagogical universities with barycenteric method of solving problems of plane geometry. Also we base efficiency of vector and coordinate geometry method of building mass, highlights the relationship of physical and metric approaches to key concepts topics including depending optimization and Lagrange and Jacobi identity. We propose order of introduction of concepts (including alternative *definition, discusses the sequence of presentation of factual material, give succinct formulation essentially of barycenteric method for solving positional and metric problems and discussed motivational bases of learning etc. Finally we analyse some risk zones and propose some methodological and methodical caveats.*

Key words. *Math teaching, preparation of future teachers to work with talented students, diversity of mathematical methods, centroid, barycenter, center of mass, task of plane geometry, barycenteric method, method of vector and coordinates, geometry of masses.*