Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Ботузова Ю.В. Забезпечення наступності навчання математики при підготовці до розв'язування задач ЗНО методом оцінки. Фізико-математична освіта. 2020. Випуск 3(25). Частина 2. С. 21-28.

Botuzova Yu.V. Ensuring The continuity of learning mathematics in preparation for solving problems of EIA with the assessment method. Physical and Mathematical Education. 2020. Issue 3(25). Part 2. P. 21-28.

DOI 10.31110/2413-1571-2020-025-3-020
УДК 317.512

Ю.В. Ботузова
Центральноукраїнський державний педагогічний університет
імені Володимира Винниченка, Україна
vassalatii@gmail.com
ORCID: 0000-0002-1313-0010

ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ НАСТУПНОСТІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ ПРИ ПІДГОТОВЦІ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЗНО МЕТОДОМ ОЦІНКИ

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *Уміння розв'язувати задачі методом оцінки є умовою успішного складання ЗНО з математики учнями ЗЗСО. Опанування цим методом здійснюється послідовно в процесі вивчення шкільного курсу математики, що сприяє забезпеченню наступності навчання математики. Зокрема, в учнів має сформуватись вміння знаходити області визначення та значень функцій, ОДЗ рівнянь, а також оцінювати значення виразів, користуючись властивостями числових нерівностей. Аналіз сучасних підручників та програм показав, що методу оцінки достатньої уваги не приділяється. Тому вчителі, керуючись власним досвідом, вивчаючи методичну літературу та щорічно аналізуючи задачі ЗНО, мають пропонувати подібні задачі учням старших класів.*

Матеріали і методи. *В дослідженні використовувались теоретичні методи: аналіз навчальних програм з математики, задач сертифікаційних робіт ЗНО попередніх років, змісту сучасних шкільних підручників із алгебри; узагальнення власного та передового педагогічного досвіду; емпіричні методи: педагогічні спостереження на уроках математики та заняттях курсів підготовки до ЗНО; методи наукового пізнання: систематизація та узагальнення для формулювання методичних рекомендацій та висновків.*

Результати. *Автором були розглянуті теоретичні основи використання методу оцінки при розв'язуванні рівнянь та їх систем. Наведені орієнтовні алгоритми даного методу. Проаналізовані основні знання зі шкільного курсу математики, які необхідні учням для успішного опанування методом оцінки. Запропоновано деякі пропедевтичні вправи із зазначенням знань та вмінь, які необхідні учням для їх виконання. Наведено задачі із сучасних підручників алгебри, а також приклади задач із сертифікаційний робіт зовнішнього незалежного оцінювання з математики, які розв'язуються методом оцінки, зокрема задачі з параметром.*

Висновки. *Запропонований в статті теоретичний матеріал, сформульовані орієнтовні алгоритми використання методу оцінки, а також наведені різнопланові приклади його застосовування будуть корисними учням та вчителям у процесі підготовки до складання зовнішнього незалежного оцінювання з математики.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: рівняння, метод оцінки, методика навчання математики, ЗНО, наступність.

ВСТУП

Одним із методів розв'язування рівнянь з використанням властивостей функцій є метод оцінки. Він передбачає отримання оцінок значень виразів, які знаходяться в правій та лівій частинах рівняння, з метою обґрунтування на їх основі відсутності коренів рівняння чи переходу до системи більш простих рівнянь.

У сучасній методичній літературі можна знайти достатньо зразків використання методу оцінки до розв'язування нестандартних, складних задач та задач із параметром (Амелькин&Рабцевич, 2004; Голубев, 2007; Голубев&Шаригін, 1991). У шкільних підручниках для класів з поглибленим (профільним) вивченням математики містяться поодинокі приклади розв'язування рівнянь нестандартного вигляду методом оцінки (Мерзляк&Полонський&Якір, 2017). Варто зазначити, що в змісті програм з математики метод оцінки не є обов'язковим для вивчення, але він достатньо часто зустрічається в задачах ЗНО. Цей факт актуалізує проблему забезпечення наступності навчання математики, адже наступність – це загальнопедагогічний принцип, спрямований на збереження неперервності освітнього процесу за рахунок забезпечення зв'язків всередині та між ступенями освіти.

Якісна підготовка учнів до складання ЗНО з математики передбачає вивчення вчителем великої кількості методичної літератури, виконання щорічного аналізу задач ЗНО та відбір задачного ряду для формування в учнів умінь та навичок розв'язання задач ЗНО, зокрема рівняння та їх системи, які розв'язуються методом оцінки.

Для того, щоб використовувати метод оцінки для розв'язування рівнянь, необхідно чітко розуміти для яких типів рівнянь він взагалі підходить. Отже, варто зазначити, що метод оцінки застосовується до рівнянь вигляду $f(x)=C$, де $C-const$, або $f(x)=g(x)$. Відмітимо, що є дві основі ознаки, які спонукають до використання методу оцінки для певного рівняння: 1). Відсутність інших стандартних методів для розв'язування заданого рівняння; 2). Обмеженість функцій, які містяться в різних частинах цього рівняння.

Метод оцінки розв'язування рівняння вигляду $f(x)=C$, де $C-const$ передбачає алгоритм №1: 1) Оцінюємо значення функції $y=f(x)$ на її області визначення; 2). Розглядаємо можливі ситуації: а) $f(x)<A$, де $A<C$; б) $f(x)\le A$, де $A<C$; в) $f(x)<C$; г) $f(x)>B$, де $B>C$; ґ) $f(x)\ge B$, де $B>C$; д) $f(x)>C$; е) $f(x)\le C$; є) $f(x)\ge C$. Якщо після аналізу отриманої оцінки значення функції $y=f(x)$ виконується одна із умов а)-д), то задане рівняння не має розв'язків. Якщо виконується одна із умов е) або є), то рівняння може мати розв'язки. Одним із способів їх знаходження є графічний метод розв'язування рівнянь.

Трапляються випадки, коли функція $y=f(x)$ в рівнянні вигляду $f(x)=C$, де $C-const$ може бути представлена у вигляді суми або добутку кількох функцій. Наприклад, $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$, або $f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)$. Тоді алгоритм використання методу оцінки може бути наступним: 1) Якщо рівняння має вигляд $f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)=C$, при чому $f_1(x)\le C_1$, $f_2(x)\le C_2$, …, $f_n(x)\le C_n$ та $C_1+C_2+\ldots+C_n=C$, або ж $f_1(x)\ge C_1$, $f_2(x)\ge C_2$, …, $f_n(x)\ge C_n$ та $C_1+C_2+\ldots+C_n=C$, то переходимо до рівносильної системи рівнянь: $\begin{cases} f_1(x)=C_1; \\ f_2(x)=C_2; \\ \vdots \\ f_n(x)=C_n. \end{cases}$ 2) Якщо рівняння має вигляд $f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)=C$, при чому $0<f_1(x)\le C_1$, $0<f_2(x)\le C_2$, …, $0<f_n(x)\le C_n$ та $C_1\cdot C_2\cdot\ldots\cdot C_n=C$, або ж $f_1(x)\ge C_1$, $f_2(x)\ge C_2$, …, $f_n(x)\ge C_n$, де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – невід'ємні числа та $C_1\cdot C_2\cdot\ldots\cdot C_n=C$, то переходимо до рівносильної системи рівнянь: $\begin{cases} f_1(x)=C_1; \\ f_2(x)=C_2; \\ \vdots \\ f_n(x)=C_n. \end{cases}$ 3) Розв'язуючи отриману систему рівнянь, знаходимо шуканий розв'язок заданого рівняння, або встановлюємо, що його не існує.

Для розв'язування рівнянь вигляду $f(x)=g(x)$ методом оцінки можна скористатись алгоритмом №2: 1) Оцінюємо значення функцій $y=f(x)$ та $y=g(x)$ на ОДЗ заданого рівняння; 2) Розглядаємо можливі ситуації: а) значення однієї з функцій менше деякого числа *А,* а значення другої функції в цей час більше деякого числа *В,* при чому $A<B$; б) значення однієї з функцій не більше деякого числа *А*, а значення другої функції більше деякого числа *В*, при чому $A<B$; в) значення однієї з функцій менше деякого числа *А,* а значення другої функції в цей час не менше деякого числа *В,* при чому $A<B$; г) значення однієї з функцій не більше деякого числа *А*, а значення другої функції не менше деякого числа *В*, при чому $A<B$; ґ) значення однієї з функцій менше деякого числа *С,* а значення другої функції в цей час більше цього ж числа *С;* д) значення однієї з функцій не більше деякого числа *С,* а значення другої функції в цей час більше цього ж числа *С*; е) значення однієї з функцій менше деякого числа *С,* а значення другої функції в цей час не менше цього ж числа *С*; є) значення однієї з функцій не менше деякого числа *С,* а значення другої функції в цей час не більше цього ж числа *С*.

Якщо після аналізу отриманих оцінок значень функцій $y=f(x)$ та $y=g(x)$ виконується одна із умов а)-е), то задане рівняння не має розв'язків. Якщо ж виконується умова є), то рівняння може мати розв'язки, які знаходяться шляхом розв'язання рівносильної системи рівнянь: $\begin{cases} f(x)=C; \\ g(x)=C. \end{cases}$

З наведених вище алгоритмів зрозуміло, що для опанування методом оцінки учні мають вміти знаходити області визначення та значень функцій, ОДЗ рівнянь, а також оцінювати значення виразів, користуючись властивостями числових нерівностей. Ці знання учні отримують впродовж вивчення курсу математики основної та старшої школи.

Мета статті полягає у розкриті важливості формування в учнів умінь розв'язувати рівняння та їх системи методом оцінки для їх успішного складання ЗНО з математики.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для виокремлення необхідного для засвоєння учнями навчального матеріалу використовувались деякі теоретичні методи, а саме: аналіз навчальних програм з математики, задач сертифікаційних робіт ЗНО попередніх робіт, змісту сучасних шкільних підручників з алгебри; узагальнення власного та передового педагогічного досвіду. Під час проведення педагогічних спостережень на уроках математики у ЗЗСО та заняттях курсів підготовки до ЗНО застосовувався емпіричний метод дослідження – спостереження. Також були використанні такі методи наукового пізнання як систематизація та узагальнення, які дозволили узагальнити результати проведеної роботи та сформулювати методичні рекомендації, зробити висновки.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

За навчальною програмою з математики, в 9 класі вивчається тема «Нерівності», в межах якої учні знайомляться з основними властивостями числових нерівностей та на їх основі оцінюють значення виразів. Окрім того, знаючи властивості основних елементарних функцій, учні вже можуть виконувати завдання на знаходження області значень функцій.

Наприклад: «*Вправа 1*. Знайдіть область значень функції: а) $y=\sqrt{x}-5$; б) $y=|x|+2$ (Істер, 2017); в) $y=5-x^2$; г) $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$ (Мерзляк&Полонський&Якір, 2017)».

Розв'язання: а) функція $y=\sqrt{x}$ на своїй області визначення $D(y)=[0;+\infty)$ приймає невід'ємні значення, тобто $\sqrt{x}\ge 0$, а тому оцінити значення виразу $\sqrt{x}-5$ можна скориставшись властивостями числових нерівностей, а саме: «якщо від обох частин правильної нерівності відняти (додати) одне й те саме число, то отримаємо правильну нерівність». Тобто, $\sqrt{x}\ge 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{x}-5\ge 0-5 \;\Rightarrow\; \sqrt{x}-5\ge -5$. Отже, $E(y)=[-5;+\infty)$.

б) областю визначення функції $y=|x|$ є множина всіх дійсних чисел, а областю значень – числовий проміжок $[0;+\infty)$, тобто $|x|\ge 0$. Користуючись властивостями числових нерівностей, аналогічно до пункту а), маємо: $|x|\ge 0 \;\Rightarrow$ $|x|+2\ge 0+2 \;\Rightarrow\; |x|+2\ge 2$. Отже, $E(y)=[2;+\infty)$.

в) областю визначення функції $y=x^2$ є множина всіх дійсних чисел, а областю значень – числовий проміжок $[0;+\infty)$, тобто $x^2\ge 0$. Спочатку оцінимо значення $-x^2$: $-x^2\le 0$, а далі додамо до обох частин отриманої нерівності 5. Таким чином, отримуємо: $-x^2+5\le 5 \;\Rightarrow\; E(y)=(-\infty;5]$.

г) функція $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$ має областю визначення одну єдину точку $x=2$. А тому приймає єдине значення, що дорівнює $y(2)=\sqrt{2-2}+\sqrt{2-2}=0$. Отже, $E(y)=\{0\}$.

Відповідь: а) $E(y)=[-5;+\infty)$; б) $E(y)=[2;+\infty)$; в) $E(y)=(-\infty;5]$; г) $E(y)=\{0\}$.

Для розвитку вміння оцінювати значення виразів (знаходити області визначення функцій) корисними є вправи, пов'язані з властивостями квадратичної функції. Наприклад: «*Вправа 2*. Знайти область значень функції: а) $y=x^2-2x+3$; б) $y=\dfrac{2}{x^2-2x+3}$».

Розв'язання: а) функція $y=x^2-2x+3$ квадратична; областю її визначення є множина всіх дійсних чисел; графіком є парабола, вітки якої спрямовані вгору; областю значень є проміжок $E(y)=[y_в;+\infty)$, де $y_в$ – ордината вершини параболи. Отже, знайшовши значення $y_в$, знайдемо область визначення заданої функції. Зазначимо, що в різних підручниках з алгебри, по-перше, фігурують різні позначення для координат вершини параболи (наприклад, $(x_в;y_в)$ (Істер, 2017), $(x_0;y_0)$ (Мерзляк&Полонський&Якір, 2017), $(m;n)$ (Бевз, 2017); по-друге, різні способи відшукання ординати вершини (підставити значення абсциси вершини у саму функцію та обчислити $y_в=f(x_в)$ (Істер, 2017); рахувати за формулою $y_0=\dfrac{4ac-b^2}{4a}=-\dfrac{D}{4a}$ (Мерзляк&Полонський&Якір, 2017; Бевз, 2017). Нам імпонує перший спосіб обчислення, адже сучасні учні не схильні до запам'ятовування формул. Достатньо того, щоб вони запам'ятали, як знаходити абсцису вершини параболи, а саме $x_в=\dfrac{-b}{2a}$.

Отже, повертаючись до нашого прикладу, знаходимо: $x_в=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-(-2)}{2}=1$, $y_в=1^2-2\cdot 1+3=1-2+3=2$. Звідки, $E(y)=[2;+\infty)$.

б) розглядаючи функцію $y=\dfrac{2}{x^2-2x+3}$, помічаємо, що знаменник ніколи не перетворюється в нуль, а приймає значення з проміжку $[2;+\infty)$, що було встановлено вище у пункті а). Таким чином, дріб $\dfrac{2}{x^2-2x+3}$ приймає лише додатні значенні, але не більші за 1. Отже, можемо записати: $0<\dfrac{2}{x^2-2x+3}\le 1 \;\Rightarrow\; E(y)=(0;1]$.

Відповідь: а) $E(y)=[2;+\infty)$; б) $E(y)=(0;1]$.

В старших класах школи учні вивчають ірраціональні, тригонометричні (10 клас), показникові, логарифмічні функції (11 клас) та їх основні властивості. Тому можуть оцінювати значення ірраціональних, тригонометричних, показникових та логарифмічних виразів. Наприклад: «*Вправа 3*. Оцініть значення виразу: а) $4\sin x-3$ (Істер&Єргіна 2018); б) $\dfrac{1}{\cos x-2}$

(Бевз&Владімірова, 2018); в) $7\cos^2 x + 3\sin^2 x$ (Істер&Єргіна 2018)».

Розв'язання:

а) відомо, що $-1 \le \sin x \le 1$, тоді за властивостями числових нерівностей: $-4 \le 4\sin x \le 4$ та $-4-3 \le 4\sin x - 3 \le 4-3$ $\Rightarrow$ $-7 \le 4\sin x - 3 \le 1$;

б) відомо, що $-1 \le \cos x \le 1$ та $-1-2 \le \cos x - 2 \le 1-2$ $\Rightarrow$ $-3 \le \cos x - 2 \le -1$, тоді дріб $\frac{1}{\cos x - 2}$ міститься в межах $-1 \le \frac{1}{\cos x - 2} \le -\frac{1}{3}$;

в) спочатку спростимо вираз $7\cos^2 x + 3\sin^2 x = 4\cos^2 x + \left(3\cos^2 x + 3\sin^2 x\right) = 4\cos^2 x + 3$. Далі оцінимо його значення $-1 \le \cos x \le 1$ $\Rightarrow$ $0 \le \cos^2 x \le 1$ $\Rightarrow 0 \le 4\cos^2 x \le 4$ $\Rightarrow$ $0+3 \le 4\cos^2 x + 3 \le 4+3$ $\Rightarrow$ $3 \le 4\cos^2 x + 3 \le 7$

Відповідь: а) $[-7;1]$; б) $\left[-1;-\frac{1}{3}\right]$; в) $[3;7]$.

Подібні задачі трапляються і на ЗНО. Зокрема, серед задач ЗНО в сертифікаційній роботі 2013 р. є завдання: «Знайдіть найбільше значення функції $y = \frac{\left(1-2\cos x\right)^4}{2}$ ». Дане завдання вимагає здійснити оцінку значення виразу $\frac{\left(1-2\cos x\right)^4}{2}$. Для цього виконуються послідовні оцінки: $-1 \le \cos x \le 1$ $\Rightarrow$ $-2 \le -2\cos x \le 2$ $\Rightarrow$ $-1 \le 1-2\cos x \le 3$ $\Rightarrow$ $0 \le \left(1-2\cos x\right)^4 \le 81$ $\Rightarrow$ $0 \le \frac{\left(1-2\cos x\right)^4}{2} \le \frac{81}{2} = 40{,}5$. Відповідь: найбільше значення функції 40,5.

Задачі на знаходження області визначення та області значень функцій, що містять ірраціональності, за статистичними даними звітів ЗНО є складними для учнів. Наприклад завдання: «Укажіть область значень функції $y = \sqrt{x^2+9} - 6$ (ЗНО 2008 р.)»

А	Б	В	Г	Д
$[9;+\infty)$	$[0;+\infty)$	$[3;+\infty)$	$[-3;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$

– виконало лише 26,21% учнів, які проходили тестування, що вказує на складність завдання. Це завдання потребувало глибокого аналізу виразу $\sqrt{x^2+9} - 6$. Область визначення заданої функції – множина всіх дійсних чисел, через те, що підкореневий вираз x^2+9 при будь-якому значені змінної *x* приймає додатні значення. Мінімальне значення виразу x^2+9 дорівнює 9, максимального значення не має, тобто $\left(x^2+9\right) \ge 9$, а тому, враховуючи, що $y = \sqrt{x}$ зростаюча функція, оцінимо значення виразу $\sqrt{x^2+9} - 6$: $\sqrt{x^2+9} \ge \sqrt{9}$ $\Rightarrow$ $\sqrt{x^2+9} \ge 3$ $\Rightarrow$ $\sqrt{x^2+9} - 6 \ge 3-6$ $\Rightarrow$ $\sqrt{x^2+9} - 6 \ge -3$. Отже, правильна відповідь «Г», тобто проміжок $[-3;+\infty)$.

Приступати до розгляду методу оцінки при розв'язуванні рівнянь варто лише тоді, коли учні мають досвід вирішення задач на знаходження області значень різноманітних виразів та функцій, вміють оцінювати вирази, використовуючи при цьому властивості числових нерівностей.

ОБГОВОРЕННЯ

Розглянемо задачі основних сесій ЗНО з математики, які передбачають використання методу оцінки для свого розв'язання.

Задача 1. «Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x^2+7x-9} + |\sin(\pi x)+1| = 0$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має більше, ніж один корінь, то у відповідь запишіть суму всіх коренів (ЗНО 2010 р.)».

Розв'язання: задане рівняння має вигляд $f_1(x) + f_2(x) = C$, де $f_1(x) = \sqrt{2x^2+7x-9}$, $f_2(x) = |\sin(\pi x)+1|$, *C*=0. Алгоритм розв'язання такого типу рівнянь наведений вище. Оцінимо значення $f_1(x)$ та $f_2(x)$. Маємо: $f_1(x) = \sqrt{2x^2+7x-9} \ge 0$, $f_2(x) = |\sin(\pi x)+1| \ge 0$ $\Rightarrow$ $f_1(x) + f_2(x) \ge 0$. Отже, можемо переходити до рівносильної системи, адже рівність нулю буде виконуватись лише у випадку, коли обидва доданки дорівнюють нулю.

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2+7x-9} = 0; \\ |\sin(\pi x)+1| = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2+7x-9 = 0; \\ \sin(\pi x)+1 = 0; \end{cases}$$

Перше рівняння системи – квадратне. Розв'язуємо, використовуючи дискримінант чи властивості суми коефіцієнтів: « $a+b+c=0$, тоді $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$ ». Отже, знаходимо $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{-9}{2}$.

Друге рівняння системи – тригонометричне, яке зводиться до частинного випадку: $\sin(\pi x) = -1$ $\Rightarrow$ $\pi x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ $\Rightarrow$ $x = -\frac{1}{2} + 2k, k \in Z$.

Розв'язком системи є спільний корінь обох рівнянь системи. Помічаємо, що серед розв'язків другого рівняння не може бути цілих, а тому спільним розв'язком обох рівнянь є $x=\frac{-9}{2}$ за умови, якщо вдасться знайти таке значення $k\in Z$, при якому виконуватиметься рівність $-\frac{9}{2}=-\frac{1}{2}+2k$. Маємо: $2k=-4$, а отже $k=-2\in Z$. Таким чином розв'язком системи є $x=\frac{-9}{2}=-4,5$. *Відповідь*: -4,5.

За даними звіту ЗНО 2010 р. розглянуте вище рівняння змогли розв'язати повністю лише 3,74% всіх учасників тестування, що відносить його до розряду «дуже складних».

Задача 2. «Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}(2x+5)\right)=1+(y-1)^8;\\ 4\sin\frac{\pi y}{2}=4x^2+4x+5.\end{cases}$ Запишіть у відповідь добуток $x_0\cdot y_0$, якщо пара $(x_0;y_0)$ є розв'язком системи рівнянь (ЗНО 2006 р.)».

Розв'язання: обидва рівняння, що містяться в заданій системі є трансцендентними рівняннями з двома змінними, а тому потребують пошуку методу розв'язання. Спробуємо скористатись алгоритмом №2 методу оцінки для рівнянь вигляду f(x)=g(y).

Розглянемо детальніше перше рівняння системи: $\cos\left(\frac{\pi}{2}(2x+5)\right)=1+(y-1)^8$. Оцінимо значення обох частин рівняння, враховуючи, що змінні *x* та *y* можуть приймати будь-які дійсні значення.

Оцінка лівої частини рівняння: $-1\le\cos\left(\frac{\pi}{2}(2x+5)\right)\le 1$. Оцінка правої частини рівняння: $(y-1)^8\ge 0 \Rightarrow 1+(y-1)^8\ge 1+0 \Rightarrow 1+(y-1)^8\ge 1$. Помічаємо, що виконується умова (є) наведено вище алгоритму №2: значення лівої частини рівняння не більше 1, а значення правої частини рівняння в цей час не менше 1. Отже, від рівняння $\cos\left(\frac{\pi}{2}(2x+5)\right)=1+(y-1)^8$ можемо переходити до рівносильної системи: $\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}(2x+5)\right)=1;\\ 1+(y-1)^8=1.\end{cases}$.

В отриманій системі рівняння простіші. Розв'яжемо кожне з них:

1). $\cos\left(\frac{\pi}{2}(2x+5)\right)=1$ – частинний випадок; $\frac{\pi}{2}(2x+5)=2\pi k, k\in Z \Rightarrow \frac{2x+5}{2}=2k, k\in Z \Rightarrow 2x+5=4k, k\in Z \Rightarrow 2x=4k-5, k\in Z \Rightarrow x=\frac{4k-5}{2}, k\in Z$;

2). $1+(y-1)^8=1 \Rightarrow (y-1)^8=0 \Rightarrow y-1=0 \Rightarrow y=1$;

Отже, розв'язком першого рівняння є пара чисел $\left(\frac{4k-5}{2};1\right), k\in Z$.

Тепер розв'яжемо друге рівняння заданої системи: $4\sin\frac{\pi y}{2}=4x^2+4x+5$. Воно також є трансцендентним, тому застосовуємо до нього метод оцінки.

Оцінка лівої частини рівняння: $-1\le\sin\frac{\pi y}{2}\le 1 \Rightarrow -4\le 4\sin\frac{\pi y}{2}\le 4$. Оцінка правої частини рівняння: $4x^2+4x+5$ – квадратний тричлен. Область його значень: $[y_в;+\infty)$. Обчислюємо $x_в=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2\cdot 4}=-\frac{1}{2}$. Тоді $y_в=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+5=4\cdot\frac{1}{4}-\frac{4}{2}+5=1-2+5=4$. Звідси, $4x^2+4x+5\ge 4$. Помічаємо, що знову виконується умова (є) наведено вище алгоритму: значення лівої частини рівняння не більше 4, а значення правої частини рівняння в цей час не менше 4. Отже, від рівняння $4\sin\frac{\pi y}{2}=4x^2+4x+5$ можемо переходити до рівносильної системи: $\begin{cases}4\sin\frac{\pi y}{2}=4;\\ 4x^2+4x+5=4.\end{cases}$

Оцінюючи значення правої частини, ми встановили, що $4x^2+4x+5=4$ виконується при $x=-\frac{1}{2}$. Тому $x=-\frac{1}{2}$ – розв'язок другого рівняння отриманої системи.

Розв'яжемо перше рівняння цієї системи: $4\sin\frac{\pi y}{2}=4 \Rightarrow \sin\frac{\pi y}{2}=1$ – частинний випадок. Маємо $\frac{\pi y}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z \Rightarrow \frac{y}{2}=\frac{1}{2}+2n, n\in Z \Rightarrow y=1+4n, n\in Z$. Отже, розв'язком другого рівняння початкової системи є пара чисел $\left(-\frac{1}{2};1+4n\right), n\in Z$.

Зіставляючи розв'язки першого та другого рівнянь $\left(\frac{4k-5}{2};1\right), k\in Z$, $\left(-\frac{1}{2};1+4n\right), n\in Z$, спробуємо знайти спільний розв'язок: $\frac{4k-5}{2}=-\frac{1}{2}$ та $1=1+4n$, де $k,n\in Z$ $\Rightarrow$ $4k-5=-1$; $4n=0$ $\Rightarrow$ $4k=4$; $n=0$; $\Rightarrow$ $k=1$; $n=0$ $\Rightarrow$ $k,n\in Z$. Це означає, що знайшлись такі цілі значення k,n , при яких система має розв'язок $\left(-\frac{1}{2};1\right)$. У відповідь необхідно записати добуток: $-\frac{1}{2}\cdot 1=-0{,}5$. *Відповідь*: -0,5.

Метод оцінки використовується також для розв'язування рівнянь з параметром, які традиційно входять до завдань ЗНО з математики і мають на меті перевірку рівня логічного й абстрактного мислення випускників шкіл, здатності до аналізу й узагальнення, необхідних для подальшого навчання у закладах вищої освіти. Як свідчать офіційні звіти про проведення ЗНО, задачі з параметрами викликають значні труднощі в учасників тестування. Адже, такі завдання належать до найвищого когнітивного рівня. Показовим є те, що максимальну кількість балів за виконання завдання з параметром отримує дуже незначна кількість учасників (в межах від 2% до 3 %), а більше половини учасників тестування навіть не приступають до його розв'язання (Ботузова, 2019).

Задача 3. «Знайдіть найменше значення *a*, при якому має розв'язки рівняння $\frac{1}{2}\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)=6-5a-2a^2$ (ЗНО 2011 р.)».

Розв'язання: Задача містить параметр *a* і за виглядом дуже схожа на попередньо розглянуту, але підхід до розв'язання буде дещо інший.

Оцінимо ліву частину рівняння. Розкривши дужки, отримаємо: $\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$. Скористаємось методом введення допоміжного кута (матеріал 10 класу профільного рівня). Нехай $\cos\varphi=\frac{1}{2}, \sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ $\varphi=\frac{\pi}{3}$. Можемо переписати: $\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x= =\cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ та оцінити $-1\le\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le 1$.

Якщо ліва частина рівняння обмежена проміжком $\left[-1;1\right]$, то для того, щоб існував розв'язок, необхідно щоб права частина також приймала значення з даного проміжку. Отже, $-1\le 6-5a-2a^2\le 1$. Перейдемо до рівносильної системи нерівностей: $\begin{cases}6-5a-2a^2\ge -1;\\ 6-5a-2a^2\le 1;\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}-2a^2-5a+7\ge 0;\\ -2a^2-5a+5\le 0.\end{cases}$ Розв'яжемо кожну із нерівностей отриманої системи методом парабол: 1) $-2a^2-5a+7\ge 0$; $D=\left(-5\right)^2-4\cdot\left(-2\right)\cdot 7=25+56=81$; $\sqrt{D}=9$; $a_1=\frac{5-9}{2\cdot\left(-2\right)}=\frac{-4}{-4}=1$; $a_2=\frac{5+9}{2\cdot\left(-2\right)}=\frac{14}{-4}=-\frac{7}{2}$;

2) $-2a^2-5a+5\le 0$; $D=\left(-5\right)^2-4\cdot\left(-2\right)\cdot 5=25+40=65$; $\sqrt{D}=\sqrt{65}$; $a_3=\frac{5-\sqrt{65}}{-4}=\frac{\sqrt{65}-5}{4}$; $a_4=\frac{5+\sqrt{65}}{-4}=\frac{-5-\sqrt{65}}{4}$.

Нанесемо отримані точки на числову пряму; зобразимо параболу, вітки якої вниз; розставимо знаки «+» та «- »; виберемо потрібний проміжок/проміжки.

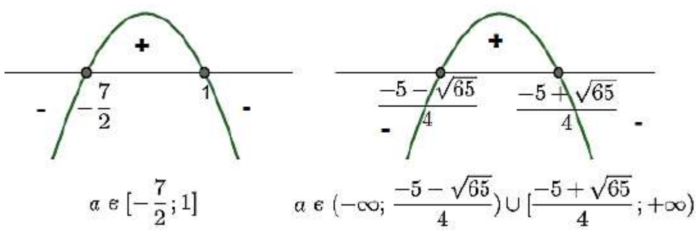

Рис. 1. Розв'язання квадратних нерівностей методом парабол

Оцінивши значення виразів $\frac{\sqrt{65}-5}{4}$ та $\frac{-5-\sqrt{65}}{4}$, знайдемо розв'язок системи нерівностей. Маємо: $\frac{3}{4}<\frac{\sqrt{65}-5}{4}<1$; $-\frac{7}{2}<\frac{-5-\sqrt{65}}{4}<0$, а тому розв'язком системи є об'єднання двох проміжків: $a\in[-\frac{7}{2};\frac{-5-\sqrt{65}}{4}]\cup[\frac{-5+\sqrt{65}}{4};1]$ (рис. 2).

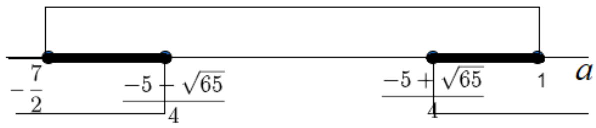

Рис. 2. Знаходження розв'язків системи нерівностей

За умовою задачі необхідно визначити найменше значення параметру *a*, при якому задане рівняння має розв'язок. Ми встановили, що рівняння має розв'язки, якщо $a \in [-\frac{7}{2};\frac{-5-\sqrt{65}}{4}] \cup [\frac{-5+\sqrt{65}}{4};1]$. При цьому найменше значення параметра *a* дорівнює $-\frac{7}{2} = -3{,}5$. *Відповідь*: -3,5.

Дане завдання виконало повністю лише 2,2% учасників тестування, що свідчить про його підвищену складність для випускників.

Незважаючи на те, що в ЗНО з математики задачі, які розв'язуються методом оцінки неодноразово зустрічались, в сучасних підручниках їх одиниці, або й взагалі такі завдання відсутні. В одному з діючих підручників алгебри для 10 класу профільного рівня знаходимо рівняння, яке розв'язується методом оцінки, але спосіб оцінювання значення виразу тут відмінний від розглянутих вище.

Задача 4. «Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x}+\sqrt{8-x}=x^2-8x+20$ (Істер&Єргіна 2018)».

Розв'язання: На вигляд дане рівняння нескладне, ірраціональне, але застосовувати до нього стандартні методи піднесення до квадрату не хочеться, адже вираз, що міститься в його правій частині перетвориться на вираз четвертого степеня і процес розв'язування рівняння лише ускладниться.

Знайдемо ОДЗ рівняння: $\begin{cases} x \ge 0; \\ 8-x \ge 0; \\ x^2-8x+20 \ge 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 0; \\ x \le 8; \\ D<0, x^2-8x+20>0, x \in R \end{cases} \Rightarrow x \in [0;8]$.

Для оцінки значень обох частин рівняння скористаємось похідною. Розглянемо функції $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{8-x}$ та $g(x)=x^2-8x+20$. Знайдемо найбільше та найменше значення цих функцій на ОДЗ рівняння (відрізку [0;8]).

1) знайдемо похідну $f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'+\left(\sqrt{8-x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{-1}{2\sqrt{8-x}}=\frac{\sqrt{8-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{8-x}}$; розв'яжемо рівняння $f'(x)=0$:

$\frac{\sqrt{8-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{8-x}}=0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{8-x}-\sqrt{x}=0; \\ 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{8-x}\ne 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{8-x}=\sqrt{x}; \\ x\ne 0, x\ne 8; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8-x=x; \\ x\ne 0, x\ne 8; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=8; \\ x\ne 0, x\ne 8; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4; \\ x\ne 0, x\ne 8. \end{cases}$

Знайдемо значення функції $f(x)$ в точці $x=4$ та на кінцях відрізка $[0;8]$:

$f(0)=\sqrt{0}+\sqrt{8-0}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$; $f(4)=\sqrt{4}+\sqrt{8-4}=4$; $f(8)=\sqrt{8}+\sqrt{8-8}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

Отже, на ОДЗ значення функції $f(x)$ можна оцінити наступним чином $2\sqrt{2}\le f(x)\le 4$.

2) знайдемо похідну $g'(x)=\left(x^2-8x+20\right)'=2x-8$; розв'яжемо рівняння $g'(x)=0$: $2x-8=0 \Rightarrow 2x=8 \Rightarrow x=4$. Легко можна встановити, що знайдена точка – це точка мінімуму функції $g(x)=x^2-8x+20$, а отже $g_{\min}(x)=4^2-8\cdot4+20=16-32+20=4 \Rightarrow$ на ОДЗ $g(x)=x^2-8x+20\ge 4$.

Отже, завдяки оцінці обох частин рівняння, ми встановили, що ліва частина рівняння не більше 4, а права – не менша 4. Тому можемо перейти до рівносильної системи рівнянь: $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{8-x}=4; \\ x^2-8x+20=4; \end{cases} \Rightarrow x=4$. В*ідповідь*: 4.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Звичайно, проведений в даній статті огляд задач, які розв'язуються за допомогою методу оцінки, не вичерпує всього їх різноманіття. Сподіваємось, що запропонований теоретичний матеріал, сформульовані орієнтовні алгоритми використання методу оцінки, а також наведені різнопланові приклади його застосування стануть у нагоді учням та вчителям у процесі підготовки до складання зовнішнього незалежного оцінювання з математики.

Список використаних джерел

1. Амелькин В.В., Рабцевич В.Л. Задачи с параметрами: справ. пособие по математике. Минск: ООО «Асар». 2004. 464 с.
2. Бевз Г.П., Бевз В.Г. *Алгебра:* підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2017. 272 с.
3. Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г. *Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень*: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2018. 336 с.
4. Ботузова Ю.В. Задачі з параметром в контексті STEM-освіти. *Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2019).* Черкаси: Вид. ФОП Гордієнко Є.І., 2019. С. 237-238.
5. Голубев В.И. Решение сложных и нестандартных задач по математике. Москва: ИЛЕКСА. 2007. 252с.
6. Істер О.С. *Алгебра*: підруч. для 9-го кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2017. 264 с.

7. Істер О.С., Єргіна О.В. *Алгебра і початки аналізу (профіл. рівень)*: підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти. Київ: Генеза, 2018. 448 с.
8. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. *Алгебра*: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків: Гімназія, 2017. 272 с.
9. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. за кладів. Харків: Гімназія, 2017. 416 с.
10. Шарыгин И.Ф., Голубев В.И. Факультативный кур по математике: Решение задач: учеб. пособие для 11 кл. ср. школы. Москва: Просвещение. 1991. 384 с.

References

1. Amelkin, V.V. & Rabtsevich V.L. (2004). Zadachi s parametrami: sprav. posobie po matematike. *[Tasks with parameters: ref. textbook on mathematics]*. Minsk: LLC "Asar" [in Russian].
2. Bevz, G.P. & Bevz, V.G. (2017). *Algebra*: pidruch. dlya 9 kl. zagalnoosvit. navch. zakl. *[Algebra: textbook. for 9 classes. general education].* Kyiv: Vydavnychyj dim «Osvita» [in Ukrainian].
3. Bevz, G.P., Bevz, V.G. & Vladimirova, N.M. (2018). *Algebra i pochatky analizu. Profilnyj riven*: pidruch. dlya 10 kl. zakladiv zagalnoyi serednoyi osvity. *[Algebra and Introduction into Analysis. Profile level: textbook. for 10 classes. general secondary education institutions].* Kyiv: Vydavnychyj dim «Osvita» [in Ukrainian].
4. Botuzova, Yu.V. (2019). Zadachi z parametrom v konteksti STEM-osvity. [Problems with a parameter in the context of STEM education]. *Materialy mizhnarodnoyi naukovo-metodychnoyi konferenciyi «Problemy matematychnoyi osvity» (PMO – 2019).* (pp.237-238). *Cherkasy: Vyd. FOP Gordiyenko Ye.I.* [in Ukrainian].
5. Golubev, V.I. (2007). Reshenie slozhnyh i nestandartnyh zadach po matematike. *[Solving complex and non-standard problems in mathematics].* Moscow: ILEKSA [in Russian].
6. Ister O.S. (2017). *Algebra*: pidruch. dlya 9-go kl. zagalnoosvit. navch. zakl. *[Algebra: textbook. for 9 classes. general education].* Kyiv: Geneza.
7. Ister, O.S. & Yergina, O.V. (2018). *Algebra i pochatky analizu (profil. riven)*: pidruch. dlya 10-go kl. zakl. zag. sered. osvity. *[Algebra and Introduction into Analysis (profile level): textbook. for 10 classes. general secondary education institutions].* Kyiv: Geneza.
8. Merzlyak, A.G., Polonskyj, V.B. & Yakir, M.S. (2017). *Algebra*: pidruch. dlya 9 kl. zagalnoosvit. navch. zakladiv. *[Algebra: textbook. for 9 classes. general education].* Kharkiv: Gimnaziya.
9. Merzlyak, A.G., Polonskyj, V.B. & Yakir, M.S. (2017). *Algebra*: pidruch. dlya 9 kl. zagalnoosvit. navch. zakladiv z poglyblenym vyvchennyam matematyky. *[Algebra for secondary schools with in-depth study of mathematics].* Kharkiv: Gimnaziya.
10. Sharygin, I.F., Golubev, V.I. (1991). Fakultativnyj kurs po matematike: Reshenie zadach: ucheb. posobie dlya 11 kl. sr. shkoly. *[Elective courses in mathematics: Problem solving: textbook. manual for 11 grades]*. Moscow: Education [in Russian].

ENSURING THE CONTINUITY OF LEARNING MATHEMATICS IN PREPARATION FOR SOLVING PROBLEMS OF EIA WITH THE ASSESSMENT METHOD

Yu.V. Botuzova

Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Ukraine

Abstract.

Formulation of the problem. *The mastering assessment method is carried out consistently in the process of learning the school course of mathematics. In particular, pupils should develop the ability to find areas of definition and values of functions, areas of the definition of equations, as well as evaluate the values of expressions, using the properties of numerical inequalities. Analysis of modern textbooks and programs has shown that the assessment method is not given enough attention. Therefore, teachers, guided by their own experience and annually analyzing the tasks of external evaluation, should offer similar tasks to senior pupils.*

Materials and methods*. In the research we used theoretical methods: analysis of mathematics curricula, problems of certification works of external evaluation of previous years, the content of modern school textbooks on algebra; generalization of own and advanced pedagogical experience; empirical methods: pedagogical observations in mathematics lessons and external preparation courses; methods of scientific cognition: systematization and generalization for the formulation of methodological recommendations and conclusions.*

Results*. We consider the theoretical basis of using the assessment method in solving equations and their systems. The algorithms of this method are given. The basic knowledge from the school course of mathematics, which is necessary for students to successfully master the method of assessment, is analyzed. Some propaedeutic exercises are offered, indicating the knowledge and skills that students need to perform them. Problems from modern textbooks of algebra are given, as well as examples of problems from certification works of external independent assessment in mathematics, which are solved by the method of assessment, in particular problems with a parameter.*

Conclusions. *The theoretical material proposed in the article formulated algorithms for using the assessment method, as well as various examples of its application will be useful to students and teachers in the process of preparation for external independent assessment in mathematics.*

Keywords: *equations, assessment method, methods of teaching mathematics, external independent evaluation, continuity.*